Serie 5

Die Aufgaben 1–5 sind online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Donnerstag, den 29. März um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie bis zum selben Datum im entsprechenden Fach im **HG J 68** abgeben.

---

1. Die Abbildung $V^n \to \mathbb{R}^n,\ v \mapsto [v]_\mathcal{B}$, die jedem Vektor seinen Koordinatenvektor bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ zuordnet, ist linear.

(a) richtig

(b) falsch

2. Bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 im $\mathbb{R}^3$ ist die Orthogonalprojektion $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto \langle x, e_1\rangle e_1$ gegeben durch die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) richtig

(b) falsch

3. Sei $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ linear. Dann existiert ein Vektor, der gleichzeitig im Kern und im Bild von $\mathcal{F}$ liegt.

(a) richtig

(b) falsch

4. Sei x eine Linearkombination von Spalten der Matrix A und y eine Lösung von $A^\top y = 0$. Dann stehen x und y bezüglich des Standardskalarproduktes senkrecht aufeinander.

(a) richtig

(b) falsch

5. Falls der Kern einer linearen Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nur aus dem Nullvektor besteht, so ist die Abbildung invertierbar.

(a) richtig

(b) falsch

6. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen für $\operatorname{Kern} A$ und $\operatorname{Bild} A$.

7. Wir betrachten die Ebene E in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch $x_1 = 0$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf E projiziert.

a) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschrieben?

b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} A$ und $\dim(\operatorname{Kern} A)$.

c) Bestimmen Sie $\operatorname{Bild} A$ und $\dim(\operatorname{Bild} A)$.

8. Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}_2$ in sich:

$$P(x) \in \mathcal{P}_2 \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad Q(x) = (2-x)\,P'(x) \in \mathcal{P}_2.$$

$\mathcal{F}$ ordnet jedem Polynom $P(x)$ das Polynom $Q(x) = (2-x)\,P'(x)$ zu ($P'(x)$ bedeutet die Ableitung von $P(x)$ nach x).

a) Zeigen Sie: $\mathcal{F}$ ist eine lineare Abbildung.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis 1, x, x^2 von $\mathcal{P}_2$ beschrieben?