

## Serie 6

Die Aufgaben 1–5 sind online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 13. April um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

1. Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  so, dass  $Ax = 0$  nur die triviale Lösung hat. Dann gilt:

- (a)  $\dim(\text{Bild } A) = n$
- (b)  $\dim(\text{Bild } A) = 1$
- (c)  $\dim(\text{Kern } A) = 0$
- (d)  $\dim(\text{Kern } A) = 1$

2. Das Bild von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch die lineare Hülle der Vektoren ...

(a)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

(b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ .

(c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

(d)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

(e)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

3. Eine Basis des Kerns von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(d)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

(e)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$

4. Ein Vektor habe bezüglich der Basis  $B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$  die Koordinaten  $(-1, -1)$ . Die Koordinaten bezüglich der Standardbasis sind ...

(a)  $(\frac{1}{2}, 0)$

(b)  $(-1, -1)$

(c)  $(0, -2)$

(d)  $(2, 0)$

(e)  $(1, 1)$

5. Seien  $A$  und  $B$  Darstellungsmatrizen einer Funktion  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $\det A = \det B$ .

- (a) Richtig
- (b) Falsch

6. Gegeben sei der Vektorraum  $V^3 = \mathbb{R}^3$  mit der Standardbasis  $\mathcal{B}$ . Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von  $V^3$  nach  $V^3$ .

a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix  $T$  von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{B}'$ .

- b) Durch welche Matrix  $B$  wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten beschrieben?
- c) Interpretieren Sie die Abbildung geometrisch.

7. Gegeben seien zwei lineare Gleichungssysteme  $Ax = b_i$ ,  $i = 1, 2$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie mit Hilfe der *Fredholm-Alternative*, ob die beiden Gleichungssysteme jeweils eine Lösung besitzen.

8. *Darstellung eines vierdimensionalen Würfels:*

Sei  $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq x_i \leq 1\}$  der Einheitswürfel in  $\mathbb{R}^4$ . Wir betrachten die Projektionen  $P_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  entlang von  $(1, 1, 1, -2)^\top$  auf den Unterraum mit  $x_4 = 0$  und  $P_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  entlang von  $(2, 1, -4, 0)^\top$  auf den Unterraum mit  $x_3 = 0$ , sowie die Abbildung

$$E : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \mapsto (x_1, x_2)^\top.$$

- a) Man bestimme die Darstellungsmatrizen von  $P_1, P_2$  und  $E$ .
- b) Man bestimme die Darstellungsmatrizen der zusammengesetzten Abbildungen  $P_2 \circ P_1$  und  $\phi := E \circ P_2 \circ P_1$ .
- c) Man skizziere das Bild der Kanten von  $W$  unter  $\phi$ .