Serie 9

Die Aufgaben 1–5 sind online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 04. Mai um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

1. Wahr oder falsch: Im Lösungspunkt einer linearen Ausgleichsaufgabe $Ax-c = r$ steht der Residuenvektor r senkrecht auf dem Bildraum von A.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

2. Wahr oder falsch: Eine lineare Ausgleichsaufgabe hat immer genau eine Lösung; sie minimiert den Fehlervektor.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

3. Wahr oder falsch: Falls der Messvektor c einer linearen Ausgleichsaufgabe $Ax - c = r$ im Spaltenraum der Koeffizientenmatrix A liegt, so ist der minimale Residuenvektor r gleich dem Nullvektor.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

4. Bei einem Modellbaumotor wurde die Abhängigkeit zwischen der Drehzahl X (in $1000\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$) und der Leistung Y (in kW) untersucht. Es ergab sich das folgende Messprotokoll:

$$\begin{array}{lll} \text{1. Messung:} & X_1 = 1; & Y_1 = 1 \\ \text{2. Messung:} & X_2 = 2; & Y_2 = 2 \\ \text{3. Messung:} & X_3 = 4; & Y_3 = 3. \end{array}$$

Bestimmen Sie die zugehörige Ausgleichsgerade $y = ax + b$: Die Fehlergleichungen hierfür lauten

$$aX_i + b - Y_i = r_i$$

für $i = 1, 2, 3$.

(a) $a = \frac{3}{11}; b = \frac{1}{2}$.

(b) $a = \frac{3}{4}; b = \frac{3}{5}$.

(c) $a = \frac{3}{5}; b = \frac{9}{14}$.

(d) $a = \frac{9}{14}; b = \frac{1}{2}$.

5. Lösen Sie von Hand folgendes Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 1 & = & r_1 \\ & & x_2 & - & 3 & = & r_2 \\ & & x_2 & - & 4 & = & r_3. \end{array}$$

Schreiben Sie dazu das Problem in der Form $Ax - c = r$, bestimmen Sie die QR-Zerlegung $A = QR$ mit Hilfe einer geeigneten Givens-Rotation sowie den Vektor $d = Q^\top c$, und bestimmen Sie schliesslich die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ des Ausgleichsproblems.

(a) $x = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

(b) $x = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) $x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.

(d) $x = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.