

Basisprüfung Lineare Algebra**Wichtige Hinweise**

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

— • —

1. Für welche Werte der Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ lässt sich der Vektor $a = (1, -2, 3)^\top$ als Linearkombination der Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} \beta \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellen? Bestimmen Sie für diese Fälle die Faktoren der Linearkombination.

2. Mit der QR - Zerlegung ist das folgende Ausgleichsproblem zu lösen :

$$Ax - \mathbf{c} = \mathbf{r} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Von der QR - Zerlegung von A sei die Matrix Q bekannt:

$$Q = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -10 & -10 & -5 \\ 10 & -11 & 2 \\ -5 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

- a) Zeigen Sie, dass Q orthogonal ist.
- b) Berechnen Sie die Lösung x^* des obigen Ausgleichsproblems mit Hilfe der QR - Zerlegung.
- c) Bestimmen Sie die Länge des zugehörigen Residuenvektors \mathbf{r}^* .
3. Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Welche der folgenden drei Systeme von Polynomen sind linear unabhängig, welche erzeugend?
- a) $P_1(x) = (x+1)^2, \quad P_2(x) = x^2 - 1, \quad P_3(x) = (x-1)^2.$
- b) $P_1(x) = (x+2)^2, \quad P_2(x) = (x-2)^2, \quad P_3(x) = x.$
- c) $P_1(x) = x - 1, \quad P_2(x) = x^2 + x, \quad P_3(x) = x^2 + 1, \quad P_4(x) = 2x - 1.$
- d) Geben Sie die nötigen MATLAB-Statements, um den Vektor $b = (-1, 7, \frac{1}{2})^\top$ zu definieren und dessen 2-Norm zu berechnen.

4. a) Bestimmen Sie Matrizen U, V und Diagonalmatrizen D_1, D_2 , so dass $U^{-1}AU = D_1, V^{-1}BV = D_2$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D , so dass $T^{-1}CT = D$ gilt für

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c) Sei eine $n \times n$ -Matrix M bereits in MATLAB eingegeben, wobei $n \geq 2$. Als Variable `lambda` soll ein Eigenwert von M berechnet werden, den Sie frei wählen können und als `t` der entsprechende Eigenvektor. Geben Sie die nötigen MATLAB-Statements an, um `lambda` und `t` zu erhalten.

5. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = Ay$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit der Transformationsmethode.
b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^\top$.
c) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y(0)$, für welche die zugehörige Lösung $y(t)$ gegen Null strebt für $t \rightarrow +\infty$.

6. In \mathbb{R}^3 seien die linearen Abbildungen $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ wie folgt definiert:

\mathcal{F}_1 : Spiegelung an der Ebene $x_1 = x_3$.

\mathcal{F}_2 : Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um die x_1 -Achse.

\mathcal{F}_3 : Drehung um $\frac{\pi}{4}$ um die x_2 -Achse.

- a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$.
b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen B von $\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1$ sowie C von $\mathcal{F}_3 \circ \mathcal{F}_2$.
c) Sind B und C orthogonal?

Viel Erfolg!