Definition

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann heisst $\lambda \in \mathbb{C}$ ein **Eigenwert** (EW) von A, falls ein Vektor $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, existiert, so dass $Ax = \lambda x$. x heisst dann **Eigenvektor** (EV) von A zum EW λ.

Definition

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann heisst $\lambda \in \mathbb{C}$ ein **Eigenwert** (EW) von A, falls ein Vektor $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, existiert, so dass $Ax = \lambda x$. x heisst dann **Eigenvektor** (EV) von A zum EW λ.

Satz

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein EW von A genau dann, wenn $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$.

Definition

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann heisst $\lambda \in \mathbb{C}$ ein **Eigenwert** (EW) von A, falls ein Vektor $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, existiert, so dass $Ax = \lambda x$. x heisst dann **Eigenvektor** (EV) von A zum EW λ.

Satz

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein EW von A genau dann, wenn $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$.

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\det(A-\lambda\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

Die EW von A sind also $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 8$.

Definition

Das Polynom $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda\mathbb{I})$ heisst **charakteristisches Polynom** von A.

Definition

Das Polynom $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda\mathbb{I})$ heisst **charakteristisches Polynom** von A.

Sei

$$p_A(\lambda) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0.$$

Polynomdivision für beliebiges $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ liefert:

$$p_A(\lambda) = \tilde{p}_A(\lambda)(\lambda - \lambda_1) + R \qquad (*)$$

wobei $\tilde{p}_A(\lambda)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ und $R \in \mathbb{C}$ der Divisionsrest ist.

Definition

Das Polynom $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda\mathbb{I})$ heisst **charakteristisches Polynom** von A.

Sei

$$p_A(\lambda) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0.$$

Polynomdivision für beliebiges $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ liefert:

$$p_A(\lambda) = \tilde{p}_A(\lambda)(\lambda - \lambda_1) + R \qquad (*)$$

wobei $\tilde{p}_A(\lambda)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ und $R \in \mathbb{C}$ der Divisionsrest ist.

Sei λ_1 nun eine *Nullstelle* von p_A. Setze $\lambda = \lambda_1$ in $(*)$, dann folgt

$$0 = p_A(\lambda_1) = \tilde{p}_A(\lambda_1) \cdot 0 + R = R$$

D.h. $p_A(\lambda) = \tilde{p}_A(\lambda)(\lambda - \lambda_1)$. Iteration ergibt:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)c_n$$

Definition

Die Anzahl der Linearfaktoren $(\lambda - \lambda_k)$ in der Produktdarstellung von p_A heisst **algebraische Vielfachheit** (alg. Vf) von λ_k.

Definition

Die Anzahl der Linearfaktoren $(\lambda - \lambda_k)$ in der Produktdarstellung von p_A heisst **algebraische Vielfachheit** (alg. Vf) von λ_k.

Beispiel

Sei $p_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^{2}(\lambda - 8)^{1}$, so ist die alg. Vf des EW 2 gleich 2 und die alg. Vf des EW 8 ist gleich 1.

Definition

Die Anzahl der Linearfaktoren $(\lambda - \lambda_k)$ in der Produktdarstellung von p_A heisst **algebraische Vielfachheit** (alg. Vf) von λ_k.

Beispiel

Sei $p_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 8)^1$, so ist die alg. Vf des EW 2 gleich 2 und die alg. Vf des EW 8 ist gleich 1.

Bemerkung: Ist a_k die alg. Vf von λ_k, so ist λ_k also eine Nullstelle der Ordnung a_k von p_A. D.h. es gilt

$$0 = p_A(\lambda_k) = p_A'(\lambda_k) = \ldots = p_A^{(a_k-1)}(\lambda_k) \text{ und } p_A^{(a_k)}(\lambda_k) \neq 0.$$

Beobachtungen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt:

- Es gibt mindestens einen EW von A.
- Es gibt höchstens n verschiedene EW von A.
- Es gibt genau n EW von A, wenn man die EW mit ihrer alg. Vf zählt.
- $$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} =$$
  $$= c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0.$$

  Dann gilt
  - $c_n = (-1)^n$
  - $c_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$
  - $c_0 = p_A(0) = \det(A)$

Definition

Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so heisst $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ die **Spur** (engl. trace) von A. Notation: $\mathrm{spur}(A)$ oder $\mathrm{trace}(A)$.

Definition

Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so heisst $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ die **Spur** (engl. trace) von A. Notation: $\mathrm{spur}(A)$ oder $\mathrm{trace}(A)$.

Definition

Die Menge aller EW von A heisst **Spektrum** von A.

Definition

Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so heisst $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ die **Spur** (engl. trace) von A. Notation: $\text{spur}(A)$ oder $\text{trace}(A)$.

Definition

Die Menge aller EW von A heisst **Spektrum** von A.

Definition

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heissen **ähnlich**, wenn für eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt $B = T^{-1}AT$.

Satz

- Ähnliche Matrizen haben
  - das selbe charakteristische Polynom
  - die selben EW mit den selben alg. Vf
  - das selbe Spektrum
  - die selbe Determinante
  - die selbe Spur
- Ist $B = T^{-1}AT$ und x ein EV von A zum EW λ, so ist $y = T^{-1}x$ ein EV von B zum selben EW λ.

Eigenvektoren

Erinnerung: Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so ist $\{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$ ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$. Er heisst **Kern** von A und wird mit $\ker(A)$ bezeichnet.

Eigenvektoren

Erinnerung: Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ so ist $\{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$ ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$. Er heisst **Kern** von A und wird mit $\ker(A)$ bezeichnet.

Somit: $x \neq 0$ ist ein EV von A zum EW λ genau dann, wenn $x \in \ker(A - \lambda\mathbb{I})$.

Satz

Die EV von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zu einem EW λ bilden einen Unterraum von $\mathbb{C}^n$.

Eigenvektoren

Erinnerung: Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so ist $\{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$ ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$. Er heisst **Kern** von A und wird mit $\ker(A)$ bezeichnet.

Somit: $x \neq 0$ ist ein EV von A zum EW λ genau dann, wenn $x \in \ker(A - \lambda\mathbb{I})$.

Satz

Die EV von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zu einem EW λ bilden einen Unterraum von $\mathbb{C}^n$.

Definition

- Der Unterraum der EV von A zum EW λ heisst **Eigenraum** E_λ von A zum EW λ. Also $E_\lambda = \ker(A - \lambda\mathbb{I})$.
- $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq n$ heisst **geometrische Vielfachheit** (geom. Vf) des EW λ.

Beispiel

Sei wieder $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ mit den EW 2 und 8.

- Gauss für das LGS $(A - 2\mathbb{I})x = 0$ liefert sofort

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

  Wir lesen ab: $\text{Rang}(A - 2\mathbb{I}) = 1$, wir haben zwei freie Parameter in der Lösung, und

$$E_2 = \ker(A - 2\mathbb{I}) = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{C} \right\}$$

  Die geom. Vf des EW 2 ist somit gleich 2.

Fortsetzung

- Gauss für das LGS $(A - 8\mathbb{I})x = 0$ liefert sofort

x_1	x_2	x_3	1
-4	2	2	0
0	-3	3	0
0	0	0	0

Wir lesen ab: $\text{Rang}(A - 8\mathbb{I}) = 2$, wir haben einen freien Parameter in der Lösung, und

$$E_8 = \ker(A - 8\mathbb{I}) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{C} \right\}$$

Die geom. Vf des EW 8 ist somit gleich 1.

Satz

geom. Vf des EW $\lambda =$
$n - \text{Rang}(A - \lambda \mathbb{I}) =$
Anzahl freie Parameter in der allgemeinen Lösung des homogenen LGS $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$.

Satz

geom. Vf des EW λ =
$n - \text{Rang}(A - \lambda\mathbb{I})$ =
Anzahl freie Parameter in der allgemeinen Lösung des homogenen LGS $(A - \lambda\mathbb{I})x = 0$.

Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ist $p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. Es gilt

- $A - 1\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ und man liest ab

$$E_1 = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{C} \right\}$$

D.h. die geom. Vf des EW 1 ist 1.

Fortsetzung

- $A - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ und man liest ab

$$E_2 = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{C} \right\}$$

D.h. die geom. Vf des EW 2 ist 1.

Fortsetzung

- $A - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ und man liest ab

$$E_2 = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{C} \right\}$$

  D.h. die geom. Vf des EW 2 ist 1.

Satz

Sei λ ein EW von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann gilt

$$1 \leq \text{geom. Vf von } \lambda \leq \text{alg. Vf von } \lambda \leq n.$$

Satz

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene EW von A und $x_1, \ldots, x_k$ dazu gehörige EV. Dann sind $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig.

Beweis für $k = 2$: Sei

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 = 0.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (A - \lambda_1 \mathbb{I})(q_1 x_1 + q_2 x_2) = \\ &= q_1 \underbrace{(A - \lambda_1 \mathbb{I}) x_1}_{=0} + q_2 (A - \lambda_1 \mathbb{I}) x_2 = \\ &= q_2 (\underbrace{\lambda_2 - \lambda_1}_{\neq 0}) x_2 \end{aligned}$$

Also $q_2 = 0$, und dann auch $q_1 = 0$. $\square$