Lineare Differentialgleichungen

Homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstantem Koeffizient

$$y' = ay \quad (a \in \mathbb{R}, \text{ konstant})$$

hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ce^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Durch Angabe einer **Anfangsbedingung** $y(0) = y_0$ wird C festgelegt: Die eindeutige Lösung des **Anfangswertproblems**

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0$$

lautet

$$y(x) = e^{ax} y_0$$

Lineare Differentialgleichungen

Homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstantem Koeffizient

$$y' = ay \quad (a \in \mathbb{R}, \text{ konstant})$$

hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ce^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Durch Angabe einer **Anfangsbedingung** $y(0) = y_0$ wird C festgelegt: Die eindeutige Lösung des **Anfangswertproblems**

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0$$

lautet

$$y(x) = e^{ax} y_0$$

Bemerkung: Die Lösungsmenge

$$\{y \in C^1(\mathbb{R}) : y' = ay\} = \{y(x) = Ce^{ax} : C \in \mathbb{R}\}$$

ist ein 1-dimensionaler UR von $C^1(\mathbb{R})$.

Homogene Syteme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \ldots &= \ldots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

kann kompakt geschrieben werden als $Y' = AY$, wobei

$$Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Anfangsbedingung: $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Lösung: $Y(x) = e^{Ax} Y_0$.

Homogene Syteme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \ldots &= \ldots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

kann kompakt geschrieben werden als $Y' = AY$, wobei

$$Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Anfangsbedingung: $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^n$.

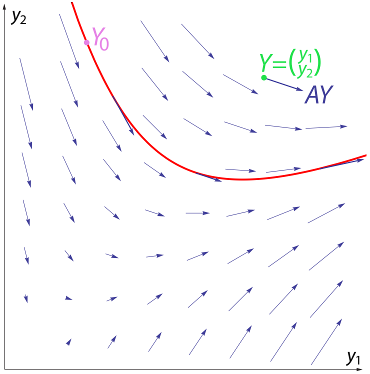
Lösung: $Y(x) = e^{Ax}Y_0$.

Bemerkung: Die Lösungsmenge

$$\{Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : Y' = AY\} = \{Y(x) = e^{Ax}Y_0 : Y_0 \in \mathbb{R}^n\}$$

ist ein n-dimensionaler UR von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Er wird aufgespannt von den Spalten von e^{Ax}.

Geometrische/physikalische Interpretation: In jedem Punkt $Y \in \mathbb{R}^n$ ist AY ein Vektor, $Y \mapsto AY$ ist also ein **Vektorfeld** (man kann sich darunter eine Strömung vorstellen). Eine Lösung $x \mapsto Y(x)$ von $Y' = AY$ ist also eine Kurve, die in jedem Punkt tangential an das Vektorfeld ist. Interpretiert man x als Zeit, so ist die Geschwindigkeit $Y'(x)$ entlang der Kurve in jedem Punkt Y der vorgegebene Vektor AY. Ein Teilchen, welches zur Zeit $x = 0$ am Ort Y_0 in die Strömung geworfen wird, befindet sich dann zur Zeit x am Ort $Y(x)$.



Bemerkung: Ist A diagonalisierbar, d.h. $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: D$ für eine reguläre Matrix T, so folgt

$$Y(x) = e^{Ax} Y_0 = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}) T^{-1} Y_0$$

Bemerkung: Ist A diagonalisierbar, d.h. $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: D$ für eine reguläre Matrix T, so folgt

$$Y(x) = e^{Ax}Y_0 = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x})T^{-1}Y_0$$

Alternatives Vorgehen für $Y' = AY$, $Y(0) = Y_0$

Sei wieder $T^{-1}AT = D$ wie oben.

Substitution: $Y = TZ$. Dann folgt $Z' = DZ$, also $z_i(x) = c_i e^{\lambda_i x}$. Dies ergibt folgendes Lösungsschema:

Allgemeine Lösung: $Y(x) = TZ(x)$, wobei $Z(x) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x})C$ für $C \in \mathbb{R}^n$.

Anfangsbedingung: Wähle C als Lösung des LGS $Y_0 = TC$, dann gilt $Y(0) = Y_0$.

Beispiel

$$\left.\begin{array}{lll} y_1' &= \ \ y_1 + 3y_2 & \qquad y_1(0) = 0 \\ y_2' &= 2y_1 + 2y_2 & \qquad y_2(0) = 5 \end{array}\right\} (*)$$

Beispiel

$$\left.\begin{array}{rclcl} y_1' &=& y_1 + 3y_2 & \qquad & y_1(0) = 0 \\ y_2' &=& 2y_1 + 2y_2 & \qquad & y_2(0) = 5 \end{array}\right\} (*)$$

Die Matrix lautet $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Beispiel

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_1 + 3y_2 \qquad y_1(0) = 0 \\ y_2' & = & 2y_1 + 2y_2 \qquad y_2(0) = 5 \end{array}\right\} (*)$$

Die Matrix lautet $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Die EW sind $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$ und die EV $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Beispiel

$$\left.\begin{array}{rlr} y_1' & = \ \ y_1 + 3y_2 & \qquad y_1(0) = 0 \\ y_2' & = 2y_1 + 2y_2 & \qquad y_2(0) = 5 \end{array}\right\} (*)$$

Die Matrix lautet $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Die EW sind $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$ und die EV $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Also $T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(4, -1)$.

Beispiel

$$\left.\begin{array}{rclcr} y_1' &=& y_1 + 3y_2 & \qquad & y_1(0) = 0 \\ y_2' &=& 2y_1 + 2y_2 & \qquad & y_2(0) = 5 \end{array}\right\} (*)$$

Die Matrix lautet $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Die EW sind $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$ und die EV $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Also $T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(4, -1)$. Somit $Z(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{4x} \\ c_2 e^{-x} \end{pmatrix}$ und $Y(x) = TZ(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{4x} + 3c_2 e^{-x} \\ c_1 e^{4x} - 2c_2 e^{-x} \end{pmatrix}$ (allgemeine Lösung).

Beispiel

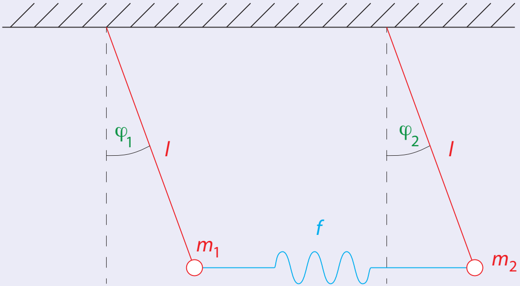
$$\left.\begin{array}{lll} y_1' & = y_1 + 3y_2 & \quad y_1(0) = 0 \\ y_2' & = 2y_1 + 2y_2 & \quad y_2(0) = 5 \end{array}\right\} (*)$$

Die Matrix lautet $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Die EW sind $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$ und die EV $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Also $T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(4, -1)$. Somit $Z(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{4x} \\ c_2 e^{-x} \end{pmatrix}$ und $Y(x) = TZ(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{4x} + 3c_2 e^{-x} \\ c_1 e^{4x} - 2c_2 e^{-x} \end{pmatrix}$ (allgemeine Lösung).

$T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ hat die Lösung $c_1 = 3, c_2 = -1$. Somit lautet die Lösung des Anfangswertproblems $(*)$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 3e^{4x} - 3e^{-x} \\ 3e^{4x} + 2e^{-x} \end{pmatrix}$$

Lineares homogenes System 2. Ordnung: Gekoppelte Pendel



Für kleine Auslenkungen ($\sin\varphi \approx \varphi$) erhält man

$$\begin{aligned} m_1 l \ddot{\varphi}_1 &= -m_1 g \varphi_1 + fl(\varphi_2 - \varphi_1) \\ m_2 l \ddot{\varphi}_2 &= -m_2 g \varphi_2 - fl(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Gekoppelte Pendel (Fortsetzung)

Für $l = g = m_1 = m_2 = f = 1$ und $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ lässt sich dies schreiben als $\ddot{\Phi} = A\Phi$ mit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Für $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(-3, -1) =: D$.

Gekoppelte Pendel (Fortsetzung)

Für $l = g = m_1 = m_2 = f = 1$ und $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ lässt sich dies schreiben als $\ddot{\Phi} = A\Phi$ mit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Für $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(-3, -1) =: D$.

Substitution: $\Phi = T\Psi$. Dann folgt $\ddot{\Psi} = D\Psi$, d.h. $\ddot{\psi}_1 = -3\psi_1$, $\ddot{\psi}_2 = -\psi_2$. Die Lösung hiervon lautet

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t) \\ \psi_2(t) &= c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t) \end{aligned}$$

Gekoppelte Pendel (Fortsetzung)

Für $l = g = m_1 = m_2 = f = 1$ und $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ lässt sich dies schreiben als $\ddot{\Phi} = A\Phi$ mit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Für $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(-3, -1) =: D$.

Substitution: $\Phi = T\Psi$. Dann folgt $\ddot{\Psi} = D\Psi$, d.h. $\ddot{\psi}_1 = -3\psi_1$, $\ddot{\psi}_2 = -\psi_2$. Die Lösung hiervon lautet

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t) \\ \psi_2(t) &= c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t) \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung: $\Phi(t) = T\Psi(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\cos(\sqrt{3}t) \\ \cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(\sqrt{3}t) \\ \sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Gekoppelte Pendel (Fortsetzung)

Für $l = g = m_1 = m_2 = f = 1$ und $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ lässt sich dies schreiben als $\ddot{\Phi} = A\Phi$ mit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Für $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(-3, -1) =: D$.

Substitution: $\Phi = T\Psi$. Dann folgt $\ddot{\Psi} = D\Psi$, d.h. $\ddot{\psi}_1 = -3\psi_1$, $\ddot{\psi}_2 = -\psi_2$. Die Lösung hiervon lautet

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t) \\ \psi_2(t) &= c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t) \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung: $\Phi(t) = T\Psi(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\cos(\sqrt{3}t) \\ \cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(\sqrt{3}t) \\ \sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Dies ist ein 4-dimensionaler Lösungsraum.

Gekoppelte Pendel (Fortsetzung)

Anfangsbedingungen: Sei $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\Phi}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Gekoppelte Pendel (Fortsetzung)

Anfangsbedingungen: Sei $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\Phi}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aus $\Phi(0) = T\Psi(0) = T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix}$ folgt $c_1 = c_3 = 0$.

Gekoppelte Pendel (Fortsetzung)

Anfangsbedingungen: Sei $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\Phi}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aus $\Phi(0) = T\Psi(0) = T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix}$ folgt $c_1 = c_3 = 0$.

Aus $\dot{\Phi}(0) = T\dot{\Psi}(0) = T \begin{pmatrix} \sqrt{3}c_2 \\ c_4 \end{pmatrix}$ folgt dann $c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $c_4 = 1$.

Gekoppelte Pendel (Fortsetzung)

Anfangsbedingungen: Sei $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\Phi}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aus $\Phi(0) = T\Psi(0) = T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix}$ folgt $c_1 = c_3 = 0$.

Aus $\dot{\Phi}(0) = T\dot{\Psi}(0) = T \begin{pmatrix} \sqrt{3}c_2 \\ c_4 \end{pmatrix}$ folgt dann $c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $c_4 = 1$.

Lösung des Anfangswertproblems:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sin(\sqrt{3}t) \\ \sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Gekoppelte Pendel (Fortsetzung)

Anfangsbedingungen: Sei $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aus $\Phi(0) = T\Psi(0) = T\begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix}$ folgt $c_1 = c_3 = 0$.

Aus $\dot\Phi(0) = T\dot\Psi(0) = T\begin{pmatrix} \sqrt{3}c_2 \\ c_4 \end{pmatrix}$ folgt dann $c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, c_4 = 1$.

Lösung des Anfangswertproblems:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\sin(\sqrt{3}t) \\ \sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Für beliebiges $f, l, m_1 = m_2 = m$ und Anfangsbedingung $\Phi(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \dot\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, erhält man auf die gleiche Weise mit $\omega := \sqrt{\frac{g}{l}}$, $\alpha := \sqrt{\frac{f}{m}}$ die Lösung

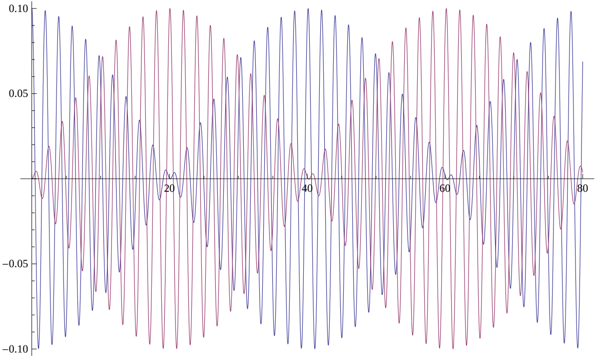
$$\Phi(t) = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \cos(\sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2}\, t) \\ \cos(\omega t) - \cos(\sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2}\, t) \end{pmatrix}$$

Für $\alpha \ll \omega$ ist dies die Überlagerung zweier Schwingungen fast gleicher Frequenz und es ergibt sich eine Schwebung: Durch ein Additionstheorem und mit $\Omega := \frac{1}{2}(\omega + \sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2})$ lässt sich die Lösung so umformen:

$$\Phi(t) = a \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha^2 t}{2\Omega}) \cos(\Omega t) \\ \sin(\frac{\alpha^2 t}{2\Omega}) \sin(\Omega t) \end{pmatrix}$$

Für $\alpha \ll \omega$ ist dies die Überlagerung zweier Schwingungen fast gleicher Frequenz und es ergibt sich eine Schwebung: Durch ein Additionstheorem und mit $\Omega := \frac{1}{2}(\omega + \sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2})$ lässt sich die Lösung so umformen:

$$\Phi(t) = a \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha^2 t}{2\Omega}) \cos(\Omega t) \\ \sin(\frac{\alpha^2 t}{2\Omega}) \sin(\Omega t) \end{pmatrix}$$



Video: gekoppelte Pendel

Video works only with Adobe Reader.
Set security options to allow animation.

Slow Normal Fast Play/Pause Stop

Audio: Schwebung

Überlagerung der Frequenzen 440Hz (Kammerton a^1) und 441Hz

Play/Pause Stop