Normierte VR

Definition

Sei V ein VR. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung

$$\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

mit den Eigenschaften

(N1) $\forall v \in V$: $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \iff v = 0$.

(N2) $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$

(N3) $\forall v, w \in V$: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Die Ungleichung in (N3) heisst **Dreiecksungleichung**.

Beispiele von Normen

- $\|v\|_2 := \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$ (Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$)
- $\|v\|_\infty := \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\}$ (Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$)
- $\|v\|_p := (|v_1|^p + \ldots + |v_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ (p-Norm auf $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$)
- Analog für komplexe VR: z.B.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1+2i \\ i \\ 1-i \end{pmatrix} \right\|_1 = |1+2i| + |i| + |1-i| = \sqrt{5} + 1 + \sqrt{2}$$

Satz

Sei V ein endlichdimensionaler VR und $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ zwei beliebige Normen auf V. Dann existieren Konstanten $A, B > 0$ so, dass $\forall x \in V$:

$$\|x\|_a \leq A\|x\|_b \text{ und } \|x\|_b \leq B\|x\|_a$$

Konvergenz

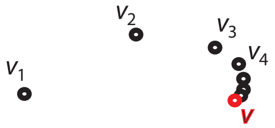
$\|x - y\|$ ist ein Mass für den Abstand der Vektoren x und y. Jede Norm induziert daher einen Konvergenzbegriff:

Konvergenz

Sei (v_n) eine Folge im normierten VR V. Dann konvergiert die Folge gegen $v \in V$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0$$

Man schreibt dann $\lim_{n\to\infty} v_n = v$.



Konvergenz

Wegen des vorigen Satzes gilt:

Satz

Sei V ein endlichdimensionaler VR und $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ zwei beliebige Normen auf V. Dann gilt:

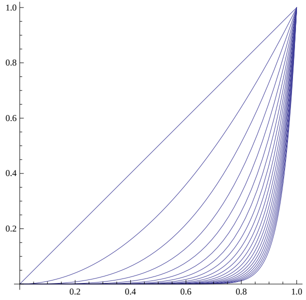
$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_a = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_b = 0$$

In endlichdimensionalen Räumen spielt es also für die Konvergenz keine Rolle, welche Norm man verwendet. Dies ist nicht mehr so in unendlichdimensionalen Räumen.

Beispiele für Normen auf $C([a, b])$

- $\|f\|_{L^\infty} := \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$ (Maximumsnorm)
- $\|f\|_{L^p} := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ (p-Norm, $1 \leq p < \infty$)

Bezüglich jeder p-Norm konvergiert die Folge $f_n(x) := x^n$ auf $[0, 1]$ gegen die Funktion $g(x) \equiv 0$, in der Maximumsnorm jedoch nicht.



Beispiel

- Auf $C^1([a,b])$ ist durch

  $$\|f\|_{C^1} := \|f\|_{L^\infty} + \|f'\|_{L^\infty}$$

  eine Norm definiert.

  Für die Folge $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$ gilt dann

  $$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^\infty} = 0$$

  aber

  $$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{C^1} = \infty$$

Beispiele für Normen auf $\mathbb{R}^{m\times n}$

Sei A eine $m \times n$-Matrix.

- $\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ (Hilbert-Schmidt-Norm)
- $\|A\|_{\mathrm{SM}} := \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ (Spaltenmaximumsnorm)
- $\|A\|_{\mathrm{ZM}} := \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (Zeilenmaximumsnorm)
- $\|A\| := \max\{\|Ax\|_b : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_a \le 1\}$ (Operatornorm)

  Die Operatornorm hängt ab von der Wahl der Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.

Skalarprodukt

Das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist für $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gegeben durch

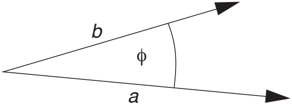
$$a \cdot b = \langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Es gilt

$$\|a\|_2 = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

und

$$\cos \phi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$



Insbesondere: $a \perp b \iff \langle a, b \rangle = 0$

Definition

Sei V ein reeller VR. Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

heisst **Skalarprodukt**, falls

(S1) $\forall x, y, z \in V$: $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
$\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

(S2) $\forall x, y \in V$: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(S3) $\forall x \in V$: $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heisst **Innenproduktraum**.

(S1) und (S2) zusammen besagen, dass das Skalarprodukt **in beiden Argument linear** ist. (S3) besagt, dass das Skalarprodukt **positiv definit** ist.

Definition

Die auf einem Innenproduktraum durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

gegebene Norm heisst die vom Skalarprodukt **induzierte Norm**.

Bemerkung: Aus (S1)–(S3) für das Skalarprodukt folgt (N1)–(N3) für die induzierte Norm.

Beispiele

- Auf $\mathbb{R}^n$ ist $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ das Standardskalarprodukt. Es induziert die euklidische Norm.
- Auf $C([a,b])$ ist ein Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Es induziert die Norm $\|\cdot\|_{L^2}$.

Bemerkung

Eine Norm $\| \cdot \|$ wird genau dann von einem Skalarprodukt induziert, wenn die **Parallelogrammregel** gilt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

In diesem Fall ist das Skalarprodukt durch die **Polarisationsformel** aus der Norm rekonstruierbar:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Definition

Zwei Vektoren x, y eines Innenproduktraums heissen **orthogonal**, falls $\langle x, y\rangle = 0$.

Notation: $x \perp y$

Beispiele

- Bezüglich des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ gilt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$.
- Wir betrachten $f_n(x) := \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}_0$, in $C([0, 2\pi])$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Dann gilt $f_n \perp f_m$ falls $m \neq n$.