Korollar

Besitzt $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ n paarweise verschiedene EW, so bilden die zugehörigen EV eine Basis von $\mathbb{C}^n$.

Definition

Eine Basis aus EV einer Matrix A heisst **Eigenbasis** der Matrix A.

Korollar

Seien $g_1, \ldots, g_k$ die geom. Vf der paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Dann gibt es in jedem Eigenraum E_{λ_j} g_j linear unabhängige Vektoren. Diese $g_1 + \ldots + g_k$ Vektoren sind dann linear unabhängig.

Beispiel

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ hat die EW $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 8$.

Wir hatten gesehen:

$$E_2 = \text{span}\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \qquad E_8 = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Die geom. Vf von λ_1 ist also $g_1 = 2$ und von λ_2 ist sie $g_2 = 1$. Die $g_1 + g_2 = 3$ gefundenen Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden somit eine Eigenbasis der Matrix A.

Beispiel

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ hat die EW $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Wir hatten gesehen:

$$E_1 = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \qquad E_2 = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}\}$$

Die geom. Vf von λ_1 ist also $g_1 = 1$ und von λ_2 ist sie $g_2 = 1$. Da $g_1 + g_2 = 2 < 3$ existiert keine Eigenbasis zur Matrix A.

Korollar

Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so gilt: Es existiert eine Eigenbasis von A genau dann wenn die Summe aller geom. Vf gleich n ist.

Bemerkung: Die Summe der alg. Vf ist immer gleich n.

Definition

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst **einfach**, falls jeder EW alg. Vf 1 hat.
- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst **halbeinfach**, falls bei jedem EW die alg. Vf und die geom. Vf übereinstimmen.

Bemerkung: A einfach $\implies$ A halbeinfach.

Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ist halbeinfach, jedoch nicht einfach.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ist weder einfach noch halbeinfach.
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ist einfach, also auch halbeinfach.

Korollar

A halbeinfach $\iff$ Es existiert eine Eigenbasis zu A.

Definition

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst **diagonalisierbar**, falls eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert so, dass $T^{-1}AT = D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$.

Satz

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt: A diagonalisierbar $\iff$ Es existiert eine Eigenbasis zu A. Genauer:

- Sei A diagonalisierbar, $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Dann sind die Spalten $t^{(i)}$ von T EV von A zu den EW d_i, und sie bilden eine Eigenbasis zu A.
- Ist $t^{(1)}, \ldots, t^{(n)}$ eine Eigenbasis von A mit zugehörigen EW $d_1, \ldots, d_n$. Dann gilt für $T := (t^{(1)} \ldots t^{(n)})$: $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$.

Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ haben wir $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(2, 2, 8)$

Definition

Ist $\mathcal{F} : V \to V$ eine lineare Abbildung, so heisst $0 \neq x \in V$ ein Eigenvektor von $\mathcal{F}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ falls $\mathcal{F}(x) = \lambda x$.

Satz

Die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ bezüglich einer Eigenbasis ist diagonal.

Definition

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst **symmetrisch**, falls $A^\top = A$.

Wir statten $\mathbb{C}^n$ mit dem komplexen Standardskalarprodukt aus: $\langle x, y \rangle = \bar{x}^\top y = \bar{x}_1 y_1 + \ldots + \bar{x}_n y_n$. Für $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt dann $\langle Bx, y \rangle = \langle x, \bar{B}^\top y \rangle$.

Lemma

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, λ, μ EW von A zu den EV x, y. Dann gilt $(\bar{\lambda} - \mu)\langle x, y \rangle = 0$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{array}{ccl} \langle Ax, y \rangle & = & \langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda}\langle x, y \rangle \\ \| & & \\ \langle x, \bar{A}^\top y \rangle & = & \langle x, Ay \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle \end{array}$$

Subtrahiert man die beiden roten Terme ergibt sich die gewünschte Gleichung. $\square$

Satz

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann gilt

(i) Alle EW von A sind reell.

(ii) Ist x ein EV von A zum EW λ, so sind auch $\bar{x}$, $\operatorname{Re} x$, $\operatorname{Im} x$ EV zum selben EW λ (falls $\operatorname{Re} x \neq 0$, $\operatorname{Im} x \neq 0$).

(iii) EV zu verschiedenen EW von A sind orthogonal.

Beweis: (i) Mit dem Lemma für $x = y$ und $\lambda = \mu$ folgt

$$0 = (\bar{\lambda} - \lambda)\langle x, x\rangle$$

also $\bar{\lambda} = \lambda$, denn $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 \neq 0$.
(ii) Aus $Ax + \lambda x$ folgt durch komplexe Konjugation $\overline{Ax} = \overline{\lambda x}$, also wegen (i) $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$. Addiert man die Hälfte der roten Gleichungen folgt

$$A\tfrac{1}{2}(x + \bar{x}) = \lambda \underbrace{\tfrac{1}{2}(x + \bar{x})}_{=\operatorname{Re} x}$$

und analog für den Imaginärteil.
(iii) Sind x, y EV zu EW $\lambda \neq \mu$ folgt aus dem Lemma und (i): $0 = (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle$. Also $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

Satz

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann gilt

- A ist halbeinfach, also diagonalisierbar.
- A besitzt eine orthonormale Eigenbasis.
- Es gibt eine orthogonale Matrix T so, dass $T^{-1}AT = T^{\top}AT$ diagonal ist.