Beispiel

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ hat die EW $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 8$.

Wir hatten gesehen:

$$E_2 = \text{span}\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \qquad E_8 = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Orthonormalisiert man die Vektoren in den zwei Eigenräumen, so erhält man die orthonormale Eigenbasis:

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Anwendungen

Potenzen von Matrizen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar. Dann existiert eine reguläre Matrix T in deren Spalten die EV von A stehen, so dass $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die entsprechenden EW von A sind. Dann gilt

$$A^k = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) T^{-1} \qquad (*)$$

Um $A^k x = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) \underbrace{T^{-1}x}_{=:z}$ zu berechnen geht man so vor:

- Löse $Tz = x$ mit Gauss nach z auf.
- $A^k x = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) z$

Bemerkung: Für Polynome p folgt aus $(*)$ sofort

$$p(A) = T \operatorname{diag}(p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)) T^{-1}$$

Repetition
Lineare Algebra
Eigenwertproblem
Anwendungen
Potenzen
Exponentialfunktion
Matrixnorm
Quadratische Formen

Exponentialfunktion einer Matrix

Seien A, T und λ_i wie oben. Dann gilt

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}) T^{-1}$$

Achtung: $e^A e^B = e^{A+B} \iff AB = BA$

Berechnung der Matrixoperatornorm

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die Operatornorm der Matrix ist gegeben durch

$$\|A\| = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

Satz

- Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt $\|A\| = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \{\mu_i\}}$. Dabei sind μ_i die EW der symmetrischen Matrix $A^\top A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, so gilt $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|\}$ wobei die λ_i die EW von A sind.

Satz

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal. Dann gilt:

- Für alle EW λ von Q gilt $|\lambda| = 1$.
- EV zu verschiedenen EW von Q sind orthogonal.
- $\|Q\| = 1$

Die Orthogonalität der EV von Q sieht man so:

Seien $e^{i\phi} \neq e^{i\psi}$ zwei EW mit zugehörigen EV x und y. Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{i\psi}e^{-i\phi}\langle x, y\rangle &= \langle e^{i\phi}x, e^{i\psi}y\rangle \\ &= \langle Qx, Qy\rangle = \langle x, \underbrace{Q^\top Q}_{=\mathbb{I}} y\rangle \\ &= \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

Also $\underbrace{(1 - e^{i\psi}e^{-i\phi})}_{\neq 0}\langle x, y\rangle = 0.$

Quadratische Formen

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann heisst

$$q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle x, Ax \rangle = x^\top Ax = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

quadratische Form von A.

Besipiel

Für $A = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ ist $q_A(x) = \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4}$. Da keine Mischterme auftreten heisst diese Form **rein quadratisch**.

Repetition

Lineare Algebra

Eigenwertproblem

Anwendungen

Potenzen

Exponentialfunktion

Matrixnorm

Quadratische Formen

Beispiel: Rotationsenergie

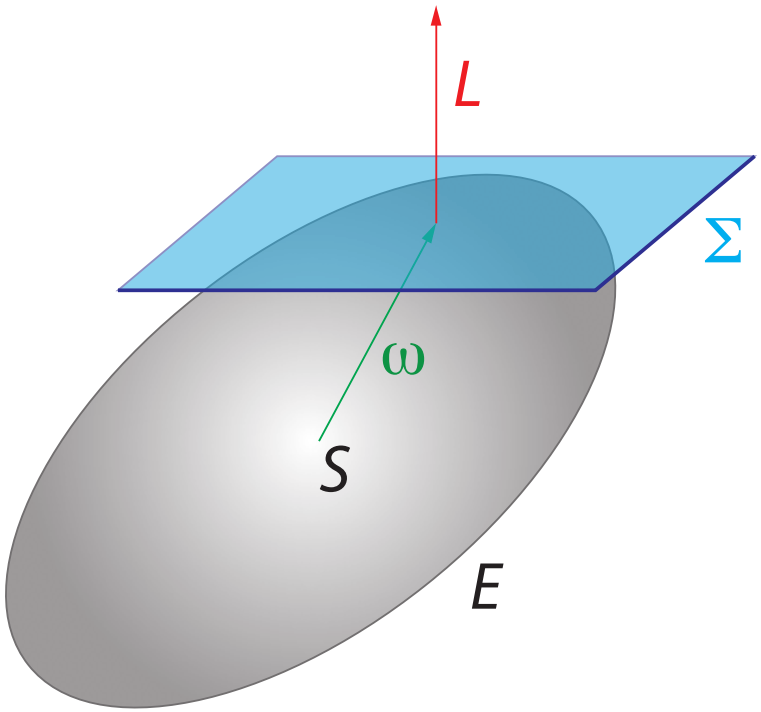
Sei K ein starrer Körper mit körperfestem Koordinatensystem (eine ONB $\mathcal{B}$) mit Ursprung im Schwerpunkt S. K rotiere mit der (momentanen) Winkelgeschwindigkeit $\omega \in \mathbb{R}^3$. Der resultierende Drehimpuls von K ist dann $L = \Theta\omega$, wobei $\Theta = \Theta^\top \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der Trägheitstensor von K (bezüglich $\mathcal{B}$) ist, und ω und L als Koordinatenvektoren bezüglich $\mathcal{B}$ einzusetzen sind. Die Rotationsenergie von K ist dann gegeben durch die quadratische Form

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\omega^\top \Theta \omega.$$

Beim kräftefreien Kreisel sind L und E_{kin} Erhaltungsgrössen. Da Θ symmetrisch ist, existiert eine ONB $\mathcal{B}'$ in der Θ diagonal ist (Hauptachensystem von K).

Repetition
Lineare Algebra
Eigenwertproblem
Anwendungen
Potenzen
Exponentialfunktion
Matrixnorm
Quadratische Formen

Beachte: $\{\omega \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}\omega^\top \Theta\omega = \text{const}\}$ ist ein Ellipsoid E. Der Gradient der Funktion $\omega \mapsto \frac{1}{2}\omega^\top \Theta\omega$ ist $\text{grad}(\frac{1}{2}\omega^\top \Theta\omega) = \Theta\omega = L$ und steht senkrecht auf der Tangentialebene Σ in ω an die Niveaufläche E. Da Σ wegen $\frac{1}{2}\omega^\top \Theta\omega = \frac{1}{2}\langle\omega, L\rangle = \text{const}$ fixen Abstand von S hat, ist Σ raumfest. K kann sich also im Raum nur so bewegen, dass E bei festem S auf Σ abrollt (Poinsot-Darstellung des freien Kreisels). Insbesondere sind die kürzeste und die längste Achse von E stabile Achsen. Die mittlere Achse jedoch nicht.



Choose speed to start animation.
Works only with Adobe Reader.
Set security options to allow animation.

Slow Normal Fast Play/Pause Stop

Beispiel: Lineare Elastizität

Der Spannungstensor ist die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = S^\top$$

und beschreibt die Situation in einem Punkt P eines unter Krafteinfluss deformierten elastischen Körpers. In P denkt man sich eine Fläche mit Einheitsnormale n. Der weggeschnittene Teil übte auf die verbleibende Materie die Spannung Sn aus. Diese zerlegt man in **Normalspannung** $\sigma(n)n$, d.h. die Komponente von Sn parallel zu n, und die **Schubspannung** $\tau(n) \perp n$:

$$Sn = \sigma(n)n + \tau(n)$$

Also ist die Normalspannung durch eine quadratische Form gegeben:

$$\sigma(n) = n^\top Sn, \quad \tau(n) = Sn - \sigma(n)n$$

Repetition
Lineare Algebra
Eigenwertproblem
Anwendungen
Potenzen
Exponentialfunktion
Matrixnorm
Quadratische Formen