Hauptachsentransformation quadratischer Formen

Sei:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch
- $\mathcal{E} = (e^{(1)}, \dots, e^{(n)})$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$ und
- $\mathcal{B} = (t^{(1)}, \dots, t^{(n)})$ eine orthonormale Eigenbasis von A
- Sei T die orthogonale Matrix mit den Spalten $t^{(i)}$, d.h. $T^\top A T = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) =: D$, wobei die d_i die entsprechenden EW von A sind.

Frage

Wie sieht die quadratische Form $q_A(x) = x^\top A x$ in der Basis $\mathcal{B}$ aus?

Lösung: T ist die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{E}$, d.h. $[x]_{\mathcal{E}} = T[x]_{\mathcal{B}}$ (die Spalten von T sind die Koordinatenvektoren der Basisvektoren von $\mathcal{B}$ bezüglich $\mathcal{E}$).

Wir schreiben kurz x für den Koordinatenvektor in der Basis $\mathcal{E}$ und y für den Koordinatenvektor in der Basis $\mathcal{B}$, also $x = Ty$.

Dann gilt

$$q_A(x) = x^\top A x = y^\top T^\top A T y = y^\top D y = q_D(y) = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$$

$\mathcal{B}$ heisst **Hauptachsensystem** von q_A, der Übergang von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ **Hauptachsentransformation**.

Satz

Die quadratische Form q_A wird durch Hauptachsentransformation rein quadratisch.

Bemerkung: Da T orthogonal ist, gilt

$$\|y\|_2 = \|Ty\|_2 = \|x\|_2$$

Somit:

$$\begin{aligned}
\max_{\|x\|_2=1} q_A(x) &= \max_{\|y\|_2=1} q_D(y) \\
&= \max_{y_1^2+\ldots+y_n^2=1} \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2 \\
&= \max_{1\le i\le n} d_i \\
&= \text{maximaler EW von } A
\end{aligned}$$

Analog:

$$\min_{\|x\|_2=1} q_A(x) = \text{minimaler EW von } A$$

Kegelschnitte

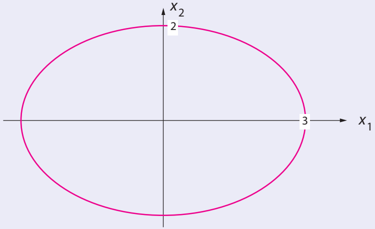
Satz

Sei q_A eine quadratische Form für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch. Dann ist die Niveaumenge $\{x \in \mathbb{R}^2 : q_A(x) = 1\}$ ein Kegelschnitt.

Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$, ist $q_A(x) = \frac{x_1^2}{3^2} + \frac{x_2^2}{2^2}$.

Der entsprechende Kegelschnitt ist eine Ellipse:



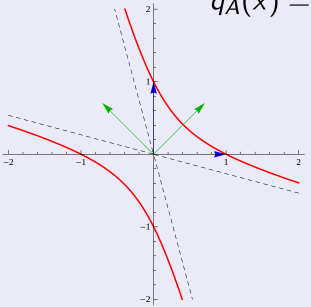
Hauptachsentransformation von Kegelschnitten

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Die EW von A sind 3 und -1, die zugehörigen EV sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

die orthogonale Matrix aus EV von A. Für die quadratische Form q_A liefert also die Hauptachsentransformation

$$q_A(x) = q_D(y) = 3y_1^2 - 1y_2^2 \stackrel{!}{=} 1$$



Dies ist eine Hyperbel:

blau: Standardbasis
grün: Hauptachsenbasis
rot: Hyperbel
gestrichelt: Asymptoten $y_2 = \pm\sqrt{3}y_1$

Bemerkungen

- Der Kegelschnitt im Hauptachsensystem heisst **in Normalform**.
- Man erhält *alle* Kegelschnitte durch Betrachtung der allgemeineren Form

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x^\top A x + a^\top x + b = 0\}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a \in \mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{R}$.

Quadriken

Ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch, so nennt man die Niveaufläche $\{x \in \mathbb{R}^3 : q_A(x) = 1\}$ eine **Quadrik** oder **Fläche 2. Grades**. Durch Hauptachsentransformation bringt man diese auf Normalform, analog wie bei den Kegelschnitten in $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung: Liegt die Quadrik in allgemeiner Form

$$Q(x) := x^\top A x + a^\top x + b = 0$$

vor, liefert die Hauptachsentransformation $y = Tx$ zunächst

$$\begin{aligned} 0 &= y^\top \underbrace{T^\top A T}_{=D} y + a^\top T y + b = \\ &= d_1 y_1^2 + \ldots + d_n y_n^2 + \gamma_1 y_1 + \ldots + \gamma_n y_n + b \end{aligned}$$

Durch die anschliessende Translation

$$z_i = \begin{cases} y_i & \text{falls } d_i = 0 \\ y_i + \frac{\gamma_i}{2d_i} & \text{falls } d_i \neq 0 \end{cases}$$

bringt man (wo möglich) die lineare Terme zum Verschwinden um zur Normalform zu gelangen.

Je nach Rang von A, den Vorzeichen der EW von A, a und b ergeben sich die verschiedenen Typen von (zum Teil entarteten) Kegelschnitten respektive Quadriken. Die Normalformen für Kegelschnitte sind:

Rang$(A) = 2$:

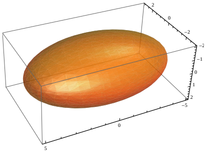
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$	Ellipse/Kreis
$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$	Hyperbel
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1 = 0$	leere Menge
$x^2 + \beta^2 y^2 = 0$	Punkt
$x^2 - \beta^2 y^2 = 0$	sich schneidendes Geradenpaar

Rang$(A) = 1$:

$x^2 - \gamma y = 0$	Parabel
$x^2 - \alpha^2 = 0$	paralleles Geradenpaar
$x^2 + \alpha^2 = 0$	leere Menge
$x^2 = 0$	Gerade

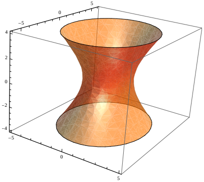
wobei α, β, γ alle $\neq 0$.

Für Quadriken im $\mathbb{R}^3$ geben wir einige Beispiele:



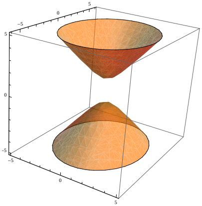
Ellipsoid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$$



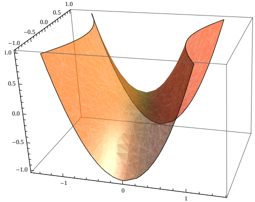
einschaliges Hyperboloid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$$



zweischaliges Hyperboloid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + 1 = 0$$



hyperbolisches Paraboloid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \gamma z = 0$$

Lokale Extrema

Definition

Sei

- $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch,
- p die Anzahl positiver EW von A,
- n die Anzahl negativer EW (je mit alg. Vf gezählt), und
- $z = m - p - n$ die alg. Vf des EW 0.

Dann heisst (p, n, z) die **Signatur** von A.

Trägheitssatz von Sylvester

Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch, $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ regulär. Dann haben A und $W^\top AW$ die selbe Signatur. Insbesondere gibt es eine Matrix W so dass

$$W^\top AW = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{z})$$

Definition

Die quadratische Form q_A und die Matrix A heissen

- **positiv definit**, falls $x \neq 0 \implies q_A(x) > 0$
- **negativ definit**, falls $x \neq 0 \implies q_A(x) < 0$
- **indefinit**, falls $q_A(x)$ positive und negative Werte annimmt
- **positiv semidefinit**, falls $\forall x : q_A(x) \geq 0$
- **negativ semidefinit**, falls $\forall x : q_A(x) \leq 0$

Satz

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär.
Dann gilt:

- $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ ist positiv definit $\iff$ alle $d_i > 0$
- A ist positiv definit $\iff$ alle EW von A sind > 0
- A ist positiv definit $\iff$ $W^\top AW$ ist positiv definit

Kriterium von Hurwitz

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, $A = (a_{ij})$. Dann gilt:

- A ist positiv definit $\iff \forall i : \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix} > 0$.

Satz

Sei $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, und $a \in U$ ein kritischer Punkt von f, d.h. $\operatorname{grad} f(a) = 0$. Weiter sei $H_f(a) = (\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j})$ die Hessesche Matrix von f in a. Dann gilt:

- $H_f(a)$ positiv definit $\implies$ a ist lokales Minimum
- $H_f(a)$ negativ definit $\implies$ a ist lokales Maximum
- $H_f(a)$ indefinit $\implies$ a ist ein Sattelpunkt

Taylor-Entwicklung von f:

$$f(x) = f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), x-a\rangle + \frac{1}{2}(x-a)^\top H_f(a)(x-a) + \dots$$