1.1. MC Fragen Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ ist beschränkt für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

☐ Ja

☐ Nein

(b) $\sup(]a, b]) = b$ für alle $a < b$ in $\mathbb{R}$.

☐ Ja

☐ Nein

(c) Wenn $A \subset B$ und B ein Maximum besitzt, dann besitzt auch A ein Maximum.

☐ Ja

☐ Nein

(d) Wenn $A \subset B$ und A ein Maximum besitzt, dann besitzt auch B ein Maximum.

☐ Ja

☐ Nein

(e) $\inf\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\} > 0$

☐ Ja

☐ Nein

1.2. Beispiel Geben Sie ein Beispiel von einer Teilmenge von $\mathbb{R}$, die beschränkt ist, aber weder Maximum noch Minimum besitzt.

1.3. Die reelen Zahlen Nur mittels den Axiomen aus der Vorlesung, zeigen Sie, dass

(a) Wenn $x > 0$, dann $\frac{1}{x} > 0$

(b) Wenn $0 \leq x \leq 1$, dann $0 \leq x^2 \leq x \leq 1$

(c) Wenn $0 < x \leq y$, dann $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

(d) Wenn $x, y \geq 0$, dann

$$x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$$

1.4. Supremum und Infimum I Seien $A := \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und $B := \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\inf(A)$ und $\inf(B)$ falls sie existieren.

1.5. Supremum und Infimum II Bestimmen Sie zunächst, ob die folgende Mengen eine obere (bzw. untere) Schranke besitzen. Wenn Ja, bestimmen Sie das Supremum (bzw. Infimum). Welche Mengen besitzen Maximum (bzw. Minimum)?

$$M_1 = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\right\}, \qquad M_2 = \left\{\frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R}\right\},$$
$$M_3 = \bigcup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \qquad M_4 = \left\{\frac{x+y}{z} : x, y > 0,\ z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}.$$

1.6. Supremum und Infimum III Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ so dass

$$n_0 \leq x < n_0 + 1. \tag{1}$$

Wir definieren $\langle x \rangle := x - n_0$, so dass

$$0 \leq \langle x \rangle < 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Sei A die Menge, die durch

$$A := \{\langle n\sqrt{2} \rangle \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

definiert ist. Zeigen Sie, dass A begrenzt ist, und dass

$$0,99 \leq \sup(A) \leq 1.$$

1.7. Supremum und Infimum IV Sei

$$A := \{1, \tfrac{11}{10}, \tfrac{111}{100}, \tfrac{1111}{1000}, \ldots\}.$$

Zeigen Sie, dass A beschränkt ist und bestimmen Sie $\inf(A)$ und $\sup(A)$.

1.8. Supremum und Infimum V Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass $A + B$ beschränkt ist und, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$. Gilt auch $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$?