**10.1. MC Fragen: Das riemannsche Integral** Wählen Sie die richtigen Antworten aus.

**(a)** Der Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} |t|\, dt$ beträgt:

- ☐ 0.
- ☐ 1.
- ☐ 2.
- ☐ 4.
- ☐ Keine der obigen Antworten ist richtig.

**(b)** Welche der folgenden Implikationsketten für eine Funktion $f$ sind richtig?

- ☐ $f$ ist differenzierbar $\Longrightarrow$ $f$ ist stetig $\Longrightarrow$ $f$ ist integrierbar.
- ☐ $f$ ist integrierbar $\Longrightarrow$ $f$ ist differenzierbar $\Longrightarrow$ $f$ ist stetig.
- ☐ $f$ ist stetig $\Longrightarrow$ $f$ ist differenzierbar $\Longrightarrow$ $f$ ist integrierbar.
- ☐ $f$ ist integrierbar $\Longrightarrow$ $f$ ist stetig $\Longrightarrow$ $f$ ist differenzierbar.
- ☐ Keine.

**10.2. Riemannschen Summen** Betrachten Sie die Funktion $f(x) = -3x^2 + 3x$.

**(a)** Zeichnen Sie den Graphen von $f$. Finden Sie das Maximum von $f$ und die Schnittpunkte von $f$ mit der $x$-Achse.

**(b)** Berechnen Sie die Riemannsche Summe $S(f, P, \xi)$, wobei $P$ die Partition

$$P = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1\right\}$$

von $[0,1]$ ist und $\xi_i$ die Mittelpunkte dieser Partition sind, nämlich

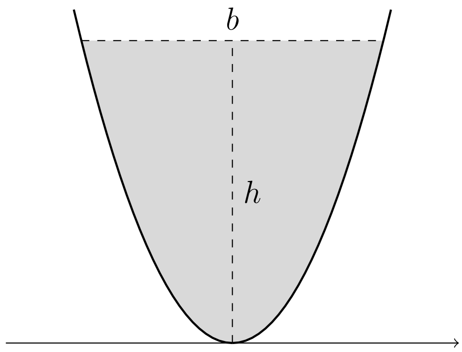
$$\xi_1 = \frac{1}{20}, \qquad \xi_2 = \frac{3}{20}, \qquad \xi_3 = \frac{5}{20}, \qquad \dots \qquad \xi_{10} = \frac{19}{20}.$$

**(c)** Aus der klassischen Geometrie ist bekannt, dass für eine Parabel $\mathcal{P}$ und eine Gerade $t$, die rechtwinklig zu der Symmetrieachse von $\mathcal{P}$ ist, die Fläche zwischen $\mathcal{P}$ und $t$ durch die Formel:

$$A = \frac{2}{3} bh$$

berechnet wird, wobei $b$ die Länge der Sehne ist, die von der Parabel $\mathcal{P}$ aus $t$ ausgeschnitten wird und $h$ die Distanz von $t$ zum Scheitel von $\mathcal{P}$ ist (vgl. die Abbildung).

Berechnen Sie mit dieser Formel die Fläche zwischen $f$ und $t$, und vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der Riemannschen Summe in (a). Wie gross ist der Fehler?




**10.3. Integral mit Riemannschen Summen** Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^a \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x, \quad a > 0,$$

indem Sie *nur die Definition mit Untersumme/Obersumme verwenden* (keinen Fundamentalsatz der Integralrechnung!).

**10.4. Stammfunktionen**

**(a)** Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $[c, d] \subseteq f([a, b])$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu

$$x \mapsto f'(g(x))g'(x), \quad x \in [c, d].$$

Finden Sie eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

**(b)** $(x^3 + 5x + 1)^{2017}(3x^2 + 5)$;

**(c)** $\mathrm{e}^{\cos x} \sin x$;

**(d)** $\dfrac{x}{\sqrt{1 + 5x^2}}$;

**(e)** $-\dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$;

**(f)** $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, mit $f$ beliebig ;

**(g)** $\tan x$;