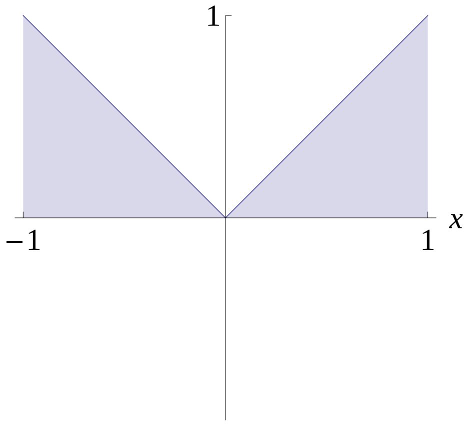
10.1. MC Fragen: Das riemannsche Integral Wählen Sie die richtigen Antworten aus.

(a) Der Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} |t|\, dt$ beträgt:

- ☐ 0.
- ☑ 1.
- ☐ 2.
- ☐ 4.
- ☐ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Lösung: Das Integral $\int_{-1}^{1} |t|\, dt$ ist der Inhalt der Fläche, welche der Funktionsgraph mit der x-Achse einschliesst. Also:



Die beiden Dreiecke bilden zusammen ein Quadrat mit Seitenlänge 1, welches den Flächeninhalt 1 hat. Mithin gilt $\int_{-1}^{1} |t|\, dt = 1$. Alternativ können wir aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Betragsfunktion auch rechnen:

$$\int_{-1}^{1} |t|\, dt = 2 \cdot \int_{0}^{1} t\, dt = 2 \left(\frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = 1.$$

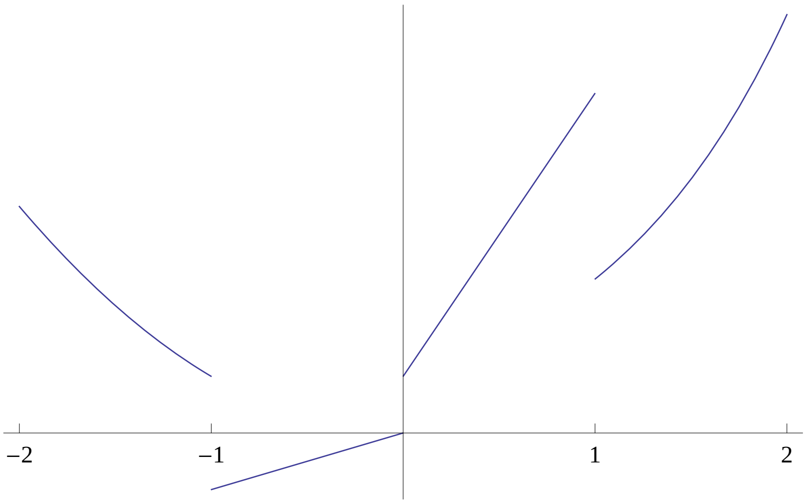
(b) Welche der folgenden Implikationsketten für eine Funktion f sind richtig?

- ☑ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.
- ☐ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig.
- ☐ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.

☐ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.

☐ Keine.

Lösung: Korrekt ist nur ist die erste Implikationskette: Differenzierbare Funktionen sind stetig und nach dem Hauptsatz integrierbar. Die Umkehrungen gelten nicht: Zum Beispiel ist die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ stetig aber nicht differenzierbar. Es gibt auch Funktionen, welche integrierbar aber nicht stetig sind. Ein Beispiel sind sogenannte stückweise stetige Funktionen. Die Idee dabei ist: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst stückweise stetig, wenn es eine Unterteilung von $[a, b]$ in offene Teilintervalle gibt, sodass f auf jedem Teilintervall stetig ist. Im Beispiel



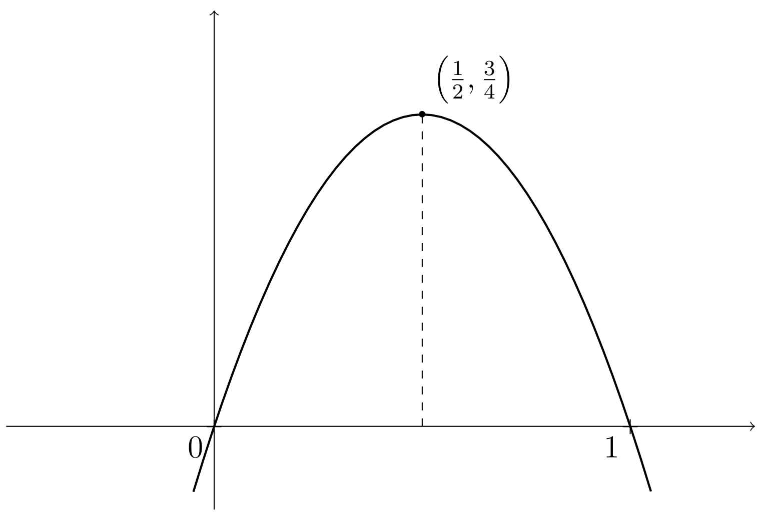
ist $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ stetig auf den Teilintervallen $]-2,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ und $]1,2[$. Die Funktion springt an den Stellen -1, 0 und 1. Über den Funktionswert an den Sprungstellen x_i wird nichts vorausgesetzt. Es sollen jedoch jeweils der Grenzwert von links oder rechts existieren. Das Integral einer solchen Funktion wird dann definiert als:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0=a}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)\mathrm{d}x.$$

10.2. Riemannschen Summen Betrachten Sie die Funktion $f(x) = -3x^2 + 3x$.

(a) Zeichnen Sie den Graphen von f. Finden Sie das Maximum von f und die Schnittpunkte von f mit der x-Achse.

Lösung: Die Funktion f definiert eine Parabel. Ihr Graph und die gesuchten Informationen sind in dieser Abbildung eingezeichnet:



(b) Berechnen Sie die Riemannsche Summe $S(f, P, \xi)$, wobei P die Partition

$$P = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}, 1\right\}$$

von $[0, 1]$ ist und ξ_i die Mittelpunkte dieser Partition sind, nämlich

$$\xi_1 = \frac{1}{20}, \qquad \xi_2 = \frac{3}{20}, \qquad \xi_3 = \frac{5}{20}, \qquad \ldots \qquad \xi_{10} = \frac{19}{20}.$$

Lösung: Aus der Definition der Riemannschen Summe erhalten wir:

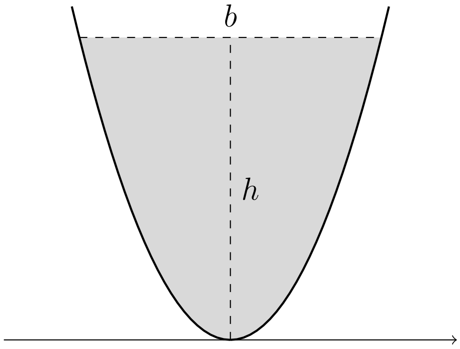
$$\begin{aligned}
S(P, f, \xi) &= \sum_{k=1}^{10} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{10} f\left(\frac{2k-1}{20}\right)\frac{1}{10} \\
&= \frac{1}{10}\left(f\left(\frac{1}{20}\right) + f\left(\frac{3}{20}\right) + \ldots + f\left(\frac{19}{20}\right)\right) = \frac{201}{400} = 0.5025.
\end{aligned}$$

(c) Aus der klassischen Geometrie ist bekannt, dass für eine Parabel $\mathcal{P}$ und eine Gerade t, die rechtwinklig zu der Symmetrieachse von $\mathcal{P}$ ist, die Fläche zwischen $\mathcal{P}$ und t durch die Formel:

$$A = \frac{2}{3}bh$$

berechnet wird, wobei b die Länge der Sehne ist, die von der Parabel $\mathcal{P}$ aus t ausgeschnitten wird und h die Distanz von t zum Scheitel von $\mathcal{P}$ ist (vgl. die Abbildung).

Berechnen Sie mit dieser Formel die Fläche zwischen f und t, und vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der Riemannschen Summe in (a). Wie gross ist der Fehler?



Lösung: In unserem Fall ist $b = 1$, $h = \frac{3}{4}$ somit erhalten wir, dass die Fläche

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

misst. Der Fehler ist somit $|A - S(P, f, \xi)| = 0.0025$.

10.3. Integral mit Riemannschen Summen Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^a \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x, \quad a > 0,$$

indem Sie *nur die Definition mit Untersumme/Obersumme verwenden* (keinen Fundamentalsatz der Integralrechnung!).

Lösung: Die Exponentialfunktion ist bekanntlich stetig, somit existiert ihr Integral. Wie betrachten eine Partition, die das Intervall $[0, a]$ in N Intervalle gleicher Länge teilt, nämlich:

$$P = \left\{0, \frac{a}{N}, \frac{2a}{N}, \dots, \frac{(N-1)a}{N}, a\right\}.$$

Weil exp monoton wachsend ist, ist die Riemannsche Untersumme von exp zu dieser Partition:

$$\begin{aligned}
\underline{S}(\exp, P) &= \sum_{k=1}^{N} \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} (\mathrm{e}^x)(x_{k+1} - x_k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{x_k} \frac{a}{N} \\
&= \frac{a}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{\frac{(k-1)a}{N}} \\
&= \frac{a}{N} \left(1 + \mathrm{e}^{\frac{a}{N}} + \mathrm{e}^{\frac{2a}{N}} + \mathrm{e}^{\frac{3a}{N}} + \ldots + \mathrm{e}^{\frac{(N-1)a}{N}}\right).
\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass eine geometrische Summe (siehe Beispiel 3.7.1) vorliegt, somit folgern wir, dass

$$\underline{S}(\exp, P) = \frac{a}{N} \frac{\mathrm{e}^a - 1}{\mathrm{e}^{\frac{a}{N}} - 1}.$$

Aus dem elementaren Grenzwert (z.B. mit der Regel von de l'Hôpital):

$$\lim_{N\to\infty} \frac{a}{N} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{a}{N}} - 1} = 1,$$

schliessen wir, dass $\lim_{N\to\infty} \underline{S}(\exp, P) = \mathrm{e}^a - 1$ ist, und dieser Grenzwert das gesuchte Integral sein muss. Alles in allem:

$$\int_0^a \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^a - 1.$$

10.4. Stammfunktionen

(a) Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $[c, d] \subseteq f([a, b])$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu

$$x \mapsto f'(g(x))g'(x), \quad x \in [c, d].$$

Finden Sie eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

(b) $(x^3 + 5x + 1)^{2017}(3x^2 + 5)$;

(c) $\mathrm{e}^{\cos x} \sin x$;

(d) $\dfrac{x}{\sqrt{1 + 5x^2}}$;

(e) $-\dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$;

(f) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, mit f beliebig ;

(g) $\tan x$;

Lösung:

(a) Wie bekannt ist, lautet die Kettenregel:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

somit ist $x \mapsto (f \circ g)(x)$ eine Stammfunktion von $x \mapsto f'(g(x))g'(x)$.

Mit (a) können wir die gesuchten Stammfunktionen einfach berechnen.

(b) Mit $f(x) = x^{2018}$ und $g(x) = x^3 + 5x + 1$, erhalten wir die Stammfunktion $x \mapsto \frac{(x^3+5x+1)^{2018}}{2018}$.

(c) Mit $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = \sin x$ erhalten wir die Stammfunktion $x \mapsto -\mathrm{e}^{\cos x}$.

(d) Mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = 1 + 5x^2$, und weil wir die gegebene Funktion als

$$\frac{x}{\sqrt{1+5x^2}} = \frac{1}{10}\frac{10x}{\sqrt{1+5x^2}}$$

schreiben können, folgern wir, dass eine Stammfunktion $x \mapsto \frac{1}{5}\sqrt{1+5x^2}$ ist.

(e) Wir erinnern uns daran, dass $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, somit erhalten wir mit $f(x) = \arctan x$ und $g(x) = \cos x$ die Stammfunktion $x \mapsto \arctan(\cos x)$.

(f) Wie bekannt ist, gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$. Weil wir nicht wissen, ob f positiv ist, müssen wir einen Betrag hinzufügen: eine Stammfunktion ist dann $x \mapsto \log|f(x)|$.

(g) Weil $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cos'(x) = -\sin x$, folgern wir mit (f), dass eine Stammfunktion $x \mapsto -\log|\cos(x)|$ ist.