11.1. MC Fragen: Integration

(a) Die Existenz einer Stammfunktion von f ist garantiert,

- ☐ wenn f stetig ist.
- ☐ wenn f stückweise stetig ist.
- ☐ wenn f differenzierbar ist.
- ☐ immer.

(b) Für $f \in C^0(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ gibt die Substitutionsregel

☐

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt$$

☐

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt$$

☐

$$\int_a^b f(\tfrac{x^2}{2})x\ dx = \int_{\frac{a^2}{2}}^{\frac{b^2}{2}} f(t)\ dt$$

☐

$$\int_a^b f(\tfrac{x^2}{2})\ dx = \int_{a^2}^{b^2} tf(t)\ dt$$

11.2. Durch Integrale definierte Funktionen Berechnen Sie die Ableitung folgender durch Integrale definierten reellen Funktionen:

$$A(x) = \int_0^{x^7+e^x} \cos(e^{2t} + 2t)\,dt, \qquad B(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Hinweise: Bemerken Sie, dass das Integral in der Definition von B immer über ein Interval $I \subset [1, +\infty)$ läuft. Somit ist $\frac{\sin(t)}{t}$ auf I wohldefiniert.

11.3. Gewichteter Mittelwertsatz Seien $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen mit G stetig und $F > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $c \in [a,b]$ existiert, sodass

$$\int_a^b F(x)G(x)\,\mathrm{d}x = G(c)\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

(b) Bleibt (1) wahr, wenn F nicht notwendigerweise positiv ist? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

11.4. Berechnung von Integralen Berechnen Sie folgende bestimmte oder unbestimmte Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2 - x^2 + x}{x}\,\mathrm{d}x;$

(b) $\displaystyle\int_1^9 (\sqrt{x} - 1)\,(x+1)\,\mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x;$

(d) $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\cos(2t)\,\mathrm{d}t;$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x;$

(f) $\displaystyle\int (x^3 + 5x + 1)^{1291}(3x^2 + 5)\,\mathrm{d}x.$

11.5. Fläche und Integralrechnung Zeichnen Sie folgende ebenen Kurven und berechnen Sie die Fläche des beschränkten Gebiets, das sie einschliessen:

(a) $x = 0$, $x = 2$ und $y = (x-1)^3$;

(b) $y = \sqrt{x}$ und $y = x^3$;

(c) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{4}$.