11.1. MC Fragen: Integration

(a) Die Existenz einer Stammfunktion von f ist garantiert,

☑ wenn f stetig ist.

☐ wenn f stückweise stetig ist.

Falsch. Die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$$

ist ein Gegenbeispiel.

☑ wenn f differenzierbar ist.

☐ immer.

Falsch.

(b) Für $f \in C^0(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ lautet die Substitutionsregel

☐

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt$$

☑

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt$$

☑

$$\int_a^b f(\tfrac{x^2}{2})x\ dx = \int_{\frac{a^2}{2}}^{\frac{b^2}{2}} f(t)\ dt$$

Lösung: Man nimmt $g(x) = \frac{x^2}{2}$ mit $g'(x) = x$.

☐

$$\int_a^b f(\tfrac{x^2}{2})\ dx = \int_{a^2}^{b^2} tf(t)\ dt$$

11.2. Durch Integrale definierte Funktionen Berechnen Sie die Ableitung folgender durch Integrale definierten reellen Funktionen:

$$A(x) = \int_0^{x^7+\mathrm{e}^x} \cos(\mathrm{e}^{2t} + 2t)\,\mathrm{d}t, \qquad B(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Hinweise: Bemerken Sie, dass das Integral in der Definition von B immer über ein Interval $I \subset [1, +\infty)$ läuft. Somit ist $\frac{\sin(t)}{t}$ auf I wohldefiniert.

Lösung: Wie bekannt, lautet der Hauptsatz der Integralrechnung, dass für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Stelle $c \in [a, b]$ die Funktion $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ differenzierbar ist mit Ableitung $F'(x) = f(x)$.

Wir betrachten A als Komposition: $A = (\phi \circ \beta)(x)$, wobei

$$\phi(x) = \int_0^x \cos(\mathrm{e}^{2t} + 2t)\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \beta(x) = x^7 + \mathrm{e}^x.$$

Die Kettenregel und der Hauptsatz der Integralrechnung liefern demnach:

$$A'(x) = \phi'(\beta(x))\beta'(x) = \cos(\exp((2x^7 + \mathrm{e}^x)) + 2(x^7 + \mathrm{e}^x))(7x^6 + \mathrm{e}^x).$$

Was B betrifft, so können wir uns wegen der Additivität des Integrals:

$$\int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{x^2+1}^{c} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad (c \text{ belibig}),$$

B als

$$B(x) = (\phi_1 \circ \beta_1)(x) + (\phi_2 \circ \beta_2)(x)$$

denken, wobei

$$\phi_1(x) = \int_x^c \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, = -\int_c^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \beta_1(x) = x^2 + 1,$$
$$\phi_2(x) = \int_c^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \beta_5(x) = x^2 + 5.$$

Nochmals durch die Kettenregel und den Hauptsatz der Integralrechnung schliessen wir, dass

$$\begin{aligned} B'(x) &= \phi_1'(\beta_1(x))\beta_1'(x) + \phi_2'(\beta_2(x))\beta_2'(x) \\ &= -\frac{\sin(x^2+1)}{x^2+1}2x + \frac{\sin(x^2+5)}{x^2+5}2x. \end{aligned}$$

11.3. Gewichteter Mittelwertsatz Seien $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen mit G stetig und $F > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $c \in [a,b]$ existiert, sodass

$$\int_a^b F(x)G(x)\,\mathrm{d}x = G(c)\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

(b) Bleibt (1) wahr, wenn F nicht notwendigerweise positiv ist? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Lösung:

(a) Weil $F > 0$ ist, gilt:

$$\left(\inf_{[a,b]} G\right) F(x) \leq G(x)F(x) \leq \left(\sup_{[a,b]} G\right) F(x) \quad \text{für jedes } x \in [a,b];$$

somit folgt aus der Monotonie des Integrals:

$$\left(\inf_{[a,b]} G\right) \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b G(x)\,F(x)\,\mathrm{d}x \leq \left(\sup_{[a,b]} G\right) \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x,$$

danach (bemerken Sie, dass weil $F > 0$, $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x > 0$ ist):

$$\inf_{[a,b]} G \leq \frac{\int_a^b G(x)\,F(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x} \leq \sup_{[a,b]} G.$$

Da G stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass $c \in [a,b]$ existiert, sodass:

$$G(c) = \frac{\int_a^b G(x)\,F(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x},$$

gilt, welches zu der Schlussfolgerung führt.

(b) Falls nicht notwendigerweise $F > 0$, ist die Aussage falsch. Gegenbeispiel:

$$[a,b] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad F(x) = \sin x, \qquad G(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{falls } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right), \end{cases}$$

Man berechnet sofort, dass

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x)G(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \sup_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} G = \frac{\pi}{2};$$

somit ist es unmöglich, dass $c \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ existiert, welches die Aussage des gewichteten Mittelwertsatzes erfüllt:

$$1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x)G(x)\,\mathrm{d}x, \qquad G(c)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für jedes } c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

11.4. Berechnung von Integralen Berechnen Sie folgende bestimmte oder unbestimmte Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2-x^2+x}{x}\,\mathrm{d}x;$ **(b)** $\displaystyle\int_1^9 (\sqrt{x}-1)\,(x+1)\,\mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x;$ **(d)** $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\cos(2t)\,\mathrm{d}t;$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x;$ **(f)** $\displaystyle\int (x^3+5x+1)^{1291}(3x^2+5)\,\mathrm{d}x.$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{2-x^2+x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^4 \left(2x^{-1}-x+1\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[2\log|x| - \frac{1}{2}x^2+x\right]_{x=1}^4\\ &= 2\log 4 - 8 + \frac{1}{2} + 4 - 1 = 4\,\log 2 - \frac{9}{2}\,.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_1^9 (\sqrt{x}-1)(x+1)\,\mathrm{d}x &= \int_1^9 x^{3/2}-x+x^{1/2}-1\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{3/2}-x\right]_{x=1}^9\\ &= \frac{2}{5}(3^5-1)-\frac{1}{2}(9^2-1)+\frac{2}{3}(3^3-1)-9+1\\ &= \frac{484}{5}-40+\frac{52}{3}-8 \;=\; \frac{992}{15}\,.\end{aligned}$$

(c) Wie in 10.4 (c) berechnet,

$$\int \mathrm{e}^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\cos x}+C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

(d) Wir integrieren partiell:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underset{\downarrow}{t^2} \underset{\uparrow}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\sin(2t)t^2\right]_0^1 - \int_0^1 \underset{\uparrow}{\sin(2t)}\underset{\downarrow}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sin(2) - \left(-\frac{1}{2}\left[\cos(2t)t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 -\cos(2t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin(2) - \left(-\frac{1}{2}\cos(2) + \left[\frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^1\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin(2) + \frac{1}{2}\cos(2) - \frac{1}{4}\sin(2) = \frac{1}{4}(\sin(2) + 2\cos(2)).
\end{aligned}$$

(e) Wir teilen den Burch auf:

$$\frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{2}.$$

Weil $\tan(x)' = \frac{1}{\cos(x)^2}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 1\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\tan(x)\right]_0^{\pi/4} - \frac{\pi}{8} \;=\; \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\,.
\end{aligned}$$

(f) Wie in 10.4 (b) berechnet,

$$\int (x^3+5x+1)^{1291}(3x^2+5)\,\mathrm{d}x = \frac{(x^3+5x+1)^{1292}}{1292} + C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

11.5. Fläche und Integralrechnung Zeichnen Sie folgende ebenen Kurven und berechnen Sie die Fläche des beschränkten Gebiets, das sie einschliessen:

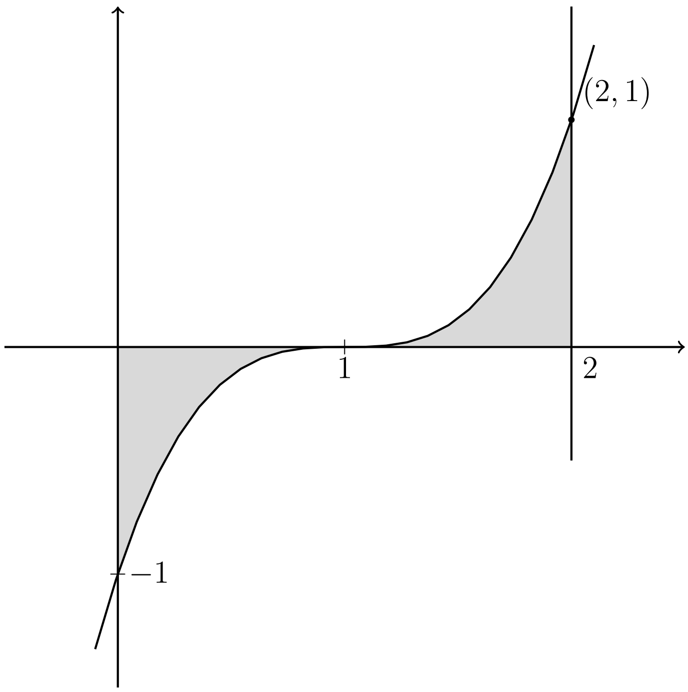
(a) $x = 0$, $x = 2$ und $y = (x-1)^3$;

(b) $y = \sqrt{x}$ und $y = x^3$;

(c) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{4}$.

Lösung:

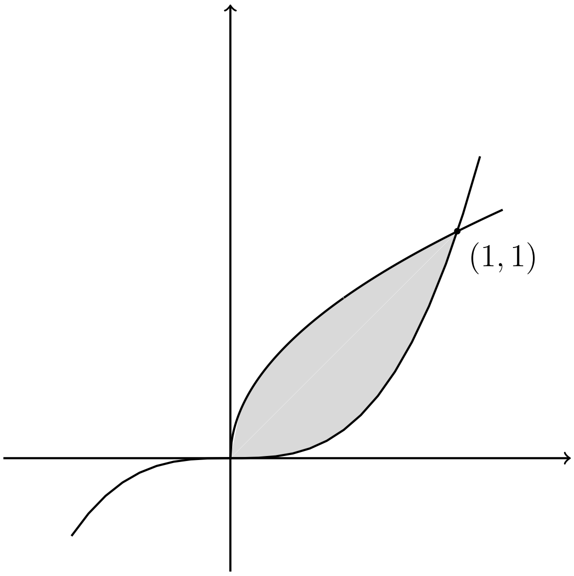
(a) Das Gebiet besteht aus zwei Stücken, eines unter der x-Achse von $x = 0$ zu $x = 1$ und das andere oberhalb der x-Achse von $x = 1$ zu $x = 2$.



Somit ist die Fläche:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 -(x-1)^3 \,\mathrm{d}x + \int_1^x (x-1)^3 \,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

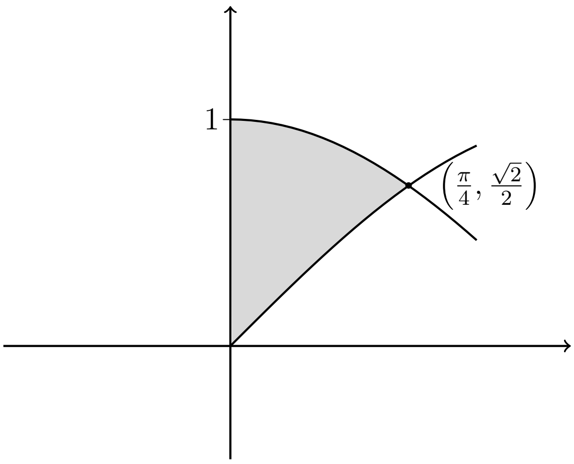
(b) Die Schnittpunkte zwischen den Kurven sind $(0, 0)$ und $(1, 1)$, die Zeichnung ist wie folgt:



Demnach ergibt sich die Fläche als Differenz folgender Integrale:

$$A = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

(c) Zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{4}$ liegt der Graph von $\cos x$ oberhalb des Graphen von $\sin x$:



Somit kann die Fläche berechnet durch:

$$A = \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x\,\mathrm{d}x = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1.$$