12.1. Fehlerfunktion

(a) Gegeben sei die Fehlerfunktion (Engl. error function)

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$$

Der Wert von

$$\int_1^2 e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x, \quad a > 0$$

ist:

- ☐ $\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}(2\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(\sqrt{a})\right)$
- ☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}(2) - \operatorname{erf}(1)\right)$
- ☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}(\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(2\sqrt{a})\right)$
- ☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}(2\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(\sqrt{a})\right)$
- ☐ $\operatorname{erf}(\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(2\sqrt{a})$.

12.2. Berechnung von Integralen Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int \sin^2 t\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$;

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t} \quad (\tan(t/2) = u)$;

(c) $\displaystyle\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\, \mathrm{d}t \quad (t^2+1 = u)$;

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}\, \mathrm{d}t \quad (t = \sin^2 u)$;

(e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}$.

12.3. Die Fläche einer Ellipse Eine Ellipse ist die Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erfüllen für fixierte Konstanten $a, b > 0$. Berechnen Sie die Fläche der Menge

$$\Omega(a,b) := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

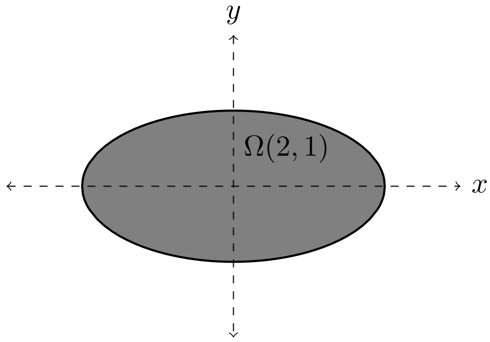

Abbildung 1: Die Fläche einer Ellipse mit $a = 2$ und $b = 1$

(Die graue Menge in Abbildung 1).

12.4. Länge einer Kurve Sei $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve

$$f(t) = \begin{pmatrix} \frac{at^2}{2} \\ \frac{bt^2}{2} \end{pmatrix}.$$

für $a, b > 0$. Berechnen Sie die Länge von f.

12.5. Eine obere und untere Schranke Zeigen Sie, dass für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} \leq \sum_{l=1}^{n} l^k \leq \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1}.$$

Hinweise: Integrier!