12.1. Fehlerfunktion

(a) Gegeben sei die Fehlerfunktion (Engl. error function)

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$$

Der Wert von

$$\int_1^2 e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x, \quad a > 0$$

ist:

- ☐ $\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{erf}(2\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(\sqrt{a})\right)$
- ☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\left(\operatorname{erf}(2) - \operatorname{erf}(1)\right)$
- ☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\left(\operatorname{erf}(\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(2\sqrt{a})\right)$
- ☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\left(\operatorname{erf}(2\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(\sqrt{a})\right)$
- ☑ $\operatorname{erf}(\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(2\sqrt{a})$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_1^2 e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x &= \int_0^2 e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x - \int_0^1 e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x \qquad \text{Substitution: } t = \sqrt{a}x \\
&= \int_0^{2\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t - \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{a}} e^{-t^2}\, dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{a}} e^{-t^2}\, dt \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}\left(2\sqrt{a}\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{a}\right)\right).
\end{aligned}$$

Somit ist die vierte Antwort korrekt.

12.2. Berechnung von Integralen

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int \sin^2 t\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t;$

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{1 + \cos t} \quad (\tan(t/2) = u);$

(c) $\displaystyle\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\, \mathrm{d}t \quad (t^2 + 1 = u);$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t} - t}\, \mathrm{d}t \quad (t = \sin^2 u);$

(e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^t}}.$

Lösung: Wir nennen jeweils “I” das betrachtete Integral.

(a) Ein kurzer Lösungsweg verwendet komplexe Zahlen. Da:

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos(2t)) = \frac{1}{2}(1-\Re(\mathrm{e}^{2it})),$$

wobei “$\Re(z)$”= Realteil von z ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t} - \Re(\mathrm{e}^{(-1+2i)t}))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} - \Re\left(\int \mathrm{e}^{(-1+2i)t}\,\mathrm{d}t\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} + \Re\left(\frac{\mathrm{e}^{(-1+2i)t}}{1-2i}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{5}\Re\left((1+2i)\mathrm{e}^{(-1+2i)t}\right)\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\left(-1 + \frac{1}{5}\Re((1+2i)\mathrm{e}^{2it})\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\left(-1 + \frac{1}{5}\cos(2t) - \frac{2}{5}\sin(2t)\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Äquivalent erhält man mit $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{t}$ und partieller Integration das Ergebnis.

(b) Die vorgeschlagene Substitution besagt:

$$t = 2\arctan u, \qquad \mathrm{d}t = \frac{2}{1+u^2}, \qquad \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \frac{1}{1+\cos t} = \frac{1+u^2}{2}.$$

Damit ergibt sich:

$$I = \int \frac{1+u^2}{2}\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = u + C = \tan\left(\frac{t}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(c) Die vorgeschlagene Substitution besagt:

$$2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u, \qquad t^2 = u-1, \qquad \sqrt{t^2+1} = \sqrt{u}.$$

Damit ergibt sich:

$$I = \int \frac{u-1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} - \sqrt{u} + C = \frac{1}{3}(t^2-2)\sqrt{t^2+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(d) Die vorgeschlagene Substitution besagt:

$$\mathrm{d}t = 2\sin u \cos u \,\mathrm{d}u, \qquad \sqrt{1-t} = \cos u, \qquad \sqrt{t} = \sin u.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2\sin u \cos^2 u}{\sin u - \sin^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int 2(1+\sin u)\,\mathrm{d}u \\ &= 2(u - \cos u) + C = 2(\arcsin(\sqrt{t}) - \sqrt{1-t}) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(e) Wir verwenden die Substitution $u = \sqrt{1+\mathrm{e}^t}$:

$$t = \log(u^2 - 1), \qquad \mathrm{d}t = \frac{2u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \log\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + C = \log\left(\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}+1}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

12.3. Die Fläche einer Ellipse Eine Ellipse ist die Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erfüllen für fixierte Konstanten $a, b > 0$. Berechnen Sie die Fläche der Menge

$$\Omega(a,b) := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

(Die graue Menge in Abbildung 1).

Lösung: Wegen der Symmetrie haben wir offensichtlich

$$\text{Fläche}(\Omega(a,b) \cap \{y \geq 0\}) = \text{Fläche}(\Omega(a,b) \cap \{y \leq 0\})$$

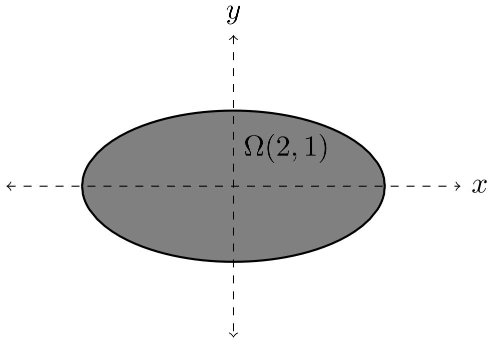

Abbildung 1: Die Fläche einer Ellipse mit $a = 2$ und $b = 1$

und damit auch

$$\text{Fläche}(\Omega(a,b)) = 2\text{Fläche}(\Omega(a,b) \cap \{y \geq 0\}) \tag{1}$$

Für $y \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ haben wir $(x,y) \in \Omega(a,b)$ genau dann wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Leftrightarrow y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

D.h. Fläche$(\Omega(a,b) \cap \{y \geq 0\})$ ist gleich der Fläche unter dem Graphen von $[-a,a] \ni x \mapsto b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, also

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx &\overset{y=\frac{x}{a}}{=} ab \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy \\
&\overset{*}{=} -ab \int_{\pi}^{0} \sin(t)\sqrt{1-\cos^2(t)}\, dt \\
&= ab \int_0^{\pi} \sin^2(t)\, dt \overset{\star}{=} ab \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right)\, dt \\
&= \frac{ab\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Bei $*$ setzen wir $y = \cos(t)$ für $t \in [0,\pi]$, so dass $dy = -\sin(t)\, dt$ und bei $\star$ benutzen wir die trigonometrische Formel $\sin^2(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right)$. Somit haben wir

$$\text{Fläche}(\Omega(a,b)) = 2\text{Fläche}(\Omega(a,b) \cap \{y \geq 0\}) = ab\pi.$$

12.4. Länge einer Kurve Sei $f : [-2,2] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve

$$f(t) = \begin{pmatrix} \frac{at^2}{2} \\ \frac{bt^2}{2} \end{pmatrix}.$$

für $a, b > 0$. Berechnen Sie die Länge von f.

Lösung: Zunächst sehen wir, dass

$$f'(t) = \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix}.$$

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Länge wie folgt definiert ist

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |f'(t)|\ dt &= \int_{-2}^{2} \left|\begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix}\right|\ dt = \int_{-2}^{2} \sqrt{a^2t^2 + b^2t^2}\ dt = \int_{-2}^{2} \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{t^2}\ dt \\ &= \int_{-2}^{2} \sqrt{a^2 + b^2}|t|\ dt = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\int_0^2 t\ dt - \int_{-2}^{0} t\ dt\right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{0}\right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\,(2 - (-2)) = 4\sqrt{a^2 + b^2}.\end{aligned}$$

12.5. Eine obere und untere Schranke Zeigen Sie, dass für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} \leq \sum_{l=1}^{n} l^k \leq \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1}.$$

Hinweise: Integrier!

Lösung: Sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definiert durch

$$f(t) = \lceil t \rceil^k,$$

wobei $\lceil t \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} \mid t \leq n\}$. Dann gilt offensichtlich

$$\int_0^n f(t)\ dt = \sum_{l=1}^{n} l^k.$$

Sei nun $g, h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ durch

$$g(t) = t^k \quad \text{und} \quad h(t) = (t+1)^k$$

definiert. Dann gilt

$$g(t) \leq f(t) \leq h(t) \quad \forall\ t \in [0, \infty)$$

(siehe Abbildung 2) und damit auch

$$\int_0^n g(t)\ dt \leq \int_0^n f(t)\ dt = \sum_{l=1}^{n} l^k \leq \int_0^n h(t)\ dt.$$

Jetzt berechnen wir

$$\int_0^n g(t)\ dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{t=0}^{n} = \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

und

$$\int_0^n h(t)\ dt = \int_0^n (t+1)^k\ dt \overset{s=t+1}{=} \int_1^{n+1} s^k\ ds = \left[\frac{s^{k+1}}{k+1}\right]_{s=1}^{n+1} = \frac{(n+1)^{k+1}-1}{k+1},$$

was die Aufgabe löst.

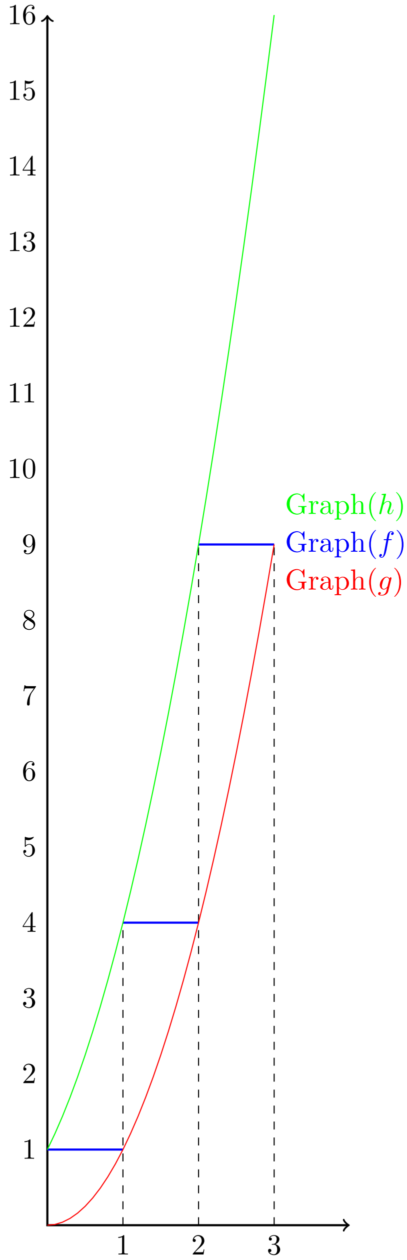

Abbildung 2: In diesem Beispiel ist $k = 2$.