13.1. MC Fragen: Uneigentliche Integrale

(a) Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ existiere. Welche der Aussagen gilt?

- ☐ Die Folge $(f(n))_n$ ist eine Nullfolge.
- ☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, ist sie eine Nullfolge.
- ☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.
- ☐ Falls f monoton fallend ist, ist $(f(n))_n$ eine Nullfolge.

13.2. Partialbruchzerlegung und Integration rationaler Funktionen Zerlegen Sie in geeignete Partialbrüche und integrieren Sie folgende Funktionen:

(a) $\dfrac{t+2}{t^2(t^2+2)}$; **(b)** $\dfrac{t}{t^3+t^2-t-1}$;

(c) $\dfrac{t^4+1}{(t^2+1)^2}$; **(d)** $\dfrac{1}{t^6-1}$.

13.3. Uneigentliche Integrale Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie folgende Integrale (falls konvergent):

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$; **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/|x|}}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|\log|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; **(d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

(e) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$; **(f)** $\displaystyle\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{1-x^x}\,\mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

13.4. Gammafunktion Die Gammafunktion ist für reelle $\alpha > 0$ definiert durch:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

(a) Beweisen Sie, dass das uneigentliche Integral (1) für jedes $\alpha > 0$ konvergiert.

(b) Beweisen Sie die Funktionalgleichung: $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

(c) Beweisen Sie dass für natürliche Zahlen gilt $\Gamma(n+1) = n!$. Was folgern Sie daraus?

(d) Berechnen Sie $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ mithilfe des wesentlichen Gausschen Integrals (das in Analysis II bewiesen werden wird):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$