13.1. MC Fragen: Uneigentliche Integrale

(a) Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ existiere. Welche der Aussagen gilt?

☐ Die Folge $(f(n))_n$ ist eine Nullfolge.

Falsch. Z.B. existiert $\int_1^\infty f(x)dx$ für f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & n \leq x \leq n + 2^{-n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

aber $(f(n) = 1)_n$ ist keine Nullfolge.

☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, ist sie eine Nullfolge.

Falsch. Siehe erste Teilaufgabe.

☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Falsch. Siehe erste Teilaufgabe.

☑ Falls f monoton fallend ist, ist $(f(n))_n$ eine Nullfolge.

Richtig. Aus Satz 6.5.1 in Struwes Skript, wissen wir, dass die Reihe $\sum_n f(n)$ konvergiert. Also ist es nötig, dass $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$.

13.2. Partialbruchzerlegung und Integration rationaler Funktionen

Zerlegen Sie in geeignete Partialbrüche und integrieren Sie folgende Funktionen:

(a) $\dfrac{t+2}{t^2(t^2+2)}$; **(b)** $\dfrac{t}{t^3+t^2-t-1}$;

(c) $\dfrac{t^4+1}{(t^2+1)^2}$; **(d)** $\dfrac{1}{t^6-1}$.

Lösung: Wir nennen jeweils "I" das betrachtete Integral und "f" die betrachtete Funktion.

(a) Mit den Vorlesung gesehenen Techniken erhalten wir die Partialbruchzerlegung:

$$f(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t} - \frac{t+2}{2(t^2+2)},$$

somit ist das Integral:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t} - \frac{t+2}{2(t^2+2)} \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\log|t| + \frac{1}{4}\log\left(t^2+2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Mit den Vorlesung gesehenen Techniken erhalten wir die Partialbruchzerlegung:

$$f(t) = \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4(t-1)},$$

somit ist das Integral:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4(t-1)} \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{4}\log(|t+1|) + \frac{1}{4}\log(|t-1|) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Durch die in der Vorlesung gesehenen Techniken erhalten wir die Partialbruchzerlegung:

$$f(t) = 1 + \frac{2}{(t^2+1)^2} - \frac{2}{t^2+1},$$

somit ist das Integral:

$$\begin{aligned} I &= \int 1 + \frac{2}{(t^2+1)^2} - \frac{2}{t^2+1} \,\mathrm{d}t \\ &= t + \frac{t}{t^2+1} + \arctan(t) - 2\arctan(t) + C \\ &= t + \frac{t}{t^2+1} - \arctan(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(d) Die Nullstellen des Polynoms $t^6 - 1$ sind di Zahlen ω^k, $k = 0, 1, \dots 5$, wobei:

$$\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

damit besitzt f eine (komplexe) Partialbruchzerlegung der Form:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{5} \frac{C_k}{t - \omega^k}.$$

Da

$$\omega^0 = 1, \qquad \omega^3 = -1, \qquad \omega^4 = \overline{\omega^2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad \omega^5 = \overline{\omega} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

erhält man eine reelle Zerlegung von f, indem man die Terme $\{2, 4\}$ und $\{1, 5\}$ zusammenfasst:

$$f(t) = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct + D}{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{Et + F}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}},$$

d.h.

$$f(t)=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2-t+1}+\frac{Et+F}{t^2+t+1},$$

für Konstanten A,B,C,D,E,F, die wir bestimmen müssen. Geduldig verwenden wir den Koeffizientenvergleich und erhalten wir den Ausdruck:

$$f(t)=\frac{1}{6(t-1)}-\frac{1}{6(t+1)}+\frac{t-2}{6\left(t^2-t+1\right)}-\frac{t+2}{6\left(t^2+t+1\right)},$$

somit ist das Integral:

$$\begin{aligned}\int f(t)\,\mathrm{d}t = \quad & \frac{1}{6}\log(|t-1|)\\ & -\frac{1}{6}\log(|t+1|)\\ & +\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\log\left(t^2-t+1\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right)\\ & +\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\log\left(t^2+t+1\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right).\right)\end{aligned}$$

13.3. Uneigentliche Integrale Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie folgende Integrale (falls konvergent):

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x;$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-1/|x|}}{x^2}\,\mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|\log|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x;$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x.$

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

(e) $\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t;$ **(f)** $\displaystyle\int_0^{1/\mathrm{e}}\frac{1}{1-x^x}\,\mathrm{d}x;$

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$

Lösung: Wir nennen jeweils “I” das betrachtete Integral.

(a) Da $\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\leq\frac{1}{x^3}$ für $x>0$, gilt

$$\int_1^a\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x\leq\int_1^a\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x\quad\text{für jedes } a>1,$$

und bekanntlich ist $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ konvergent; ausserdem ist $a \mapsto \int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$ monoton wachsend, weil der Integrand positiv ist. Wir schliessen, dass der Grenzwert für $a \to +\infty$ existiert, das heisst, dass I konvergent ist.

Mit der Substitution $t = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$ ($x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t$) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \frac{(1-t^2)^3}{t^6} t \frac{2t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \frac{1-t^2}{t^4} = 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} t^{-4} - t^{-2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left[-\frac{1}{3}t^{-3} + t^{-1}\right]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \\
&= 2\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{-3/2} + \sqrt{\frac{a}{a+1}} + \frac{1}{3}2^{3/2} - \sqrt{2},\right)
\end{aligned}$$

also:

$$I = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2-\sqrt{2}).$$

(b) Das Integral konvergiert genau dann, wenn das Integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

konvergiert. Mit der Substitution $t = \frac{1}{x}$ und für $0 < \epsilon < A$ erhalten wir:

$$\int_\epsilon^A \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{1/\epsilon}^{1/A} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-t}\right]_{1/A}^{1/\epsilon} = -e^{-\frac{1}{\epsilon}} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{A}},$$

und dieser Ausdruck strebt nach 1 für $A \to +\infty$ und $\epsilon \to 0^+$. Somit konvertiert das Integral und

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2.$$

(c) Wir sehen, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{|x|\log|x|}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x|x|}{1+x^2}\log x = +\infty,$$

somit wächst der Integrand schneller als $\frac{1}{x}$. Weil $\frac{1}{x}$ nicht integrierbar über $(1, +\infty)$ ist, kann I erst recht nicht konvergieren.

(d) Wir trennen das Integral:

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Weil $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x > 0$, und weil $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, ist I_1 nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Weil $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ für $x \geq 1$, und $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, ist I_2 nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Wir folgern, dass I konvergiert.

Mit der Substitution $t = \sqrt{x}$ erhalten wir:

$$\int_a^b \frac{1}{t(1+t^2)} 2t\,\mathrm{d}t = 2\left[\arctan t\right]_a^b = 2(\arctan b - \arctan a).$$

Da $\lim_{b\to+\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$ und $\arctan(0) = 0$, wir schliessen, dass $I = \pi$.

(e) Für alle $t \geq 0$ gilt mittels Taylor-Formel: $\sin t = t - \frac{t^3}{6}\cos\tau$ für ein $\tau \in [0,t]$. Damit ergibt sich:

$$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{6}{6 - t^2\cos\tau} - 1\right) = \frac{t\cos\tau}{6 - t^2\cos\tau} \leq \frac{t}{5}, \quad t \in [0,1].$$

Der Integrand ist stetig nach 0 fortsetzbar, somit ist das Integral konvergent.

(f) Die Funktion $1 - x^x = 1 - e^{x\log x}$ ist positiv in $(0, \frac{1}{e})$, weil $x\log x < 0$ in $(0, \frac{1}{e})$. Da $\mathrm{e}^t > 1 + t$ für jedes $t > 0$, erhalten wir:

$$e^{x\log x} > 1 + x\log x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{x\log x}} > \frac{1}{1 - (1 + x\log x)} = \frac{1}{x\log x}.$$

Bekanntlich ist $\int_0^a \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x$ divergent. Somit ist nach dem Majorantenkriterium das Integral divergent.

(g) Die Substitution $t = \frac{1}{u}$ liefert, dass es äquivalent ist, die Konvergenz von:

$$\int_0^1 \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}x$$

zu untersuchen. Mittels Taylor-Formel gilt: $\sin u = t - \frac{u^3}{6}\cos\tau$ für ein $\tau \in [0,u]$, somit:

$$\int_0^1 \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{u} - \frac{\cos\tau}{6}u\right)\,\mathrm{d}u,$$

und dieses Integral ist bekanntlich divergent. Somit ist I divergent.

13.4. Gammafunktion Die Gammafunktion ist für reelle $\alpha > 0$ definiert durch:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

(a) Beweisen Sie, dass das uneigentliche Integral (1) für jedes $\alpha > 0$ konvergiert.

(b) Beweisen Sie die Funktionalgleichung: $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

(c) Beweisen Sie dass für natürliche Zahlen gilt $\Gamma(n+1) = n!$. Was folgern Sie daraus?

(d) Berechnen Sie $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ mithilfe des wesentlichen Gausschen Integrals (das in Analysis II bewiesen werden wird):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Lösung:

(a) Wir trennen das Integral:

$$\Gamma(\alpha) = I_1 + I_2 = \int_0^1 t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Wegen $\alpha - 1 > -1$, konvergiert das Integral $\int_0^1 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$. Wegen $0 < t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t} < t^\alpha - 1$ für $0 < t \leq 1$, konvergiert I_1.

Was I_2 betrifft,gibt es zu vorgegebenem $\alpha > 0$ ein t_0 mit $\mathrm{e}^t > t^{\alpha+1}$ für $t > t_0$. Hieraus folgt

$$t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t} \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{für } t > t_0,$$

und dies impliziert die Konvergenz des Integrals $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

(b) In der nachfolgenden Rechnung müssten strenggenommen Integrale von ϵ bis x betrachtet werden; anschliessend wäre der Grenübergang $\epsilon \to 0$, $x \to +\infty$ durchzuführen. Es gilt:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} \underset{\downarrow}{t^\alpha}\underset{\uparrow}{\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^\alpha\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \alpha\Gamma(\alpha);$$

denn der erste Summand liefert wegen

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha\mathrm{e}^{-t} = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} t^\alpha\mathrm{e}^{-t} = 0$$

keinen Beitrag.

(c) Wir benutzen Induktion und (a). Es gilt:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = 1 = 0!.$$

Induktionsschritt:

$$\Gamma(n+2) \overset{(a)}{=} (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

Wir schliessen, dass bis auf Ersetzen $n \rightsquigarrow n+1$ die Gammafunktion eine Fortsetzung der Fakultätsfunktion: $n \mapsto n!$ auf nichtganze Werte ist.

(d) Zuerst bemerken wir, dass das Gaussche Integrals geschrieben werden kann als:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Mit der Substitution $u = \sqrt{t}$ erhalten wir:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi},$$

somit ist $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.