1.1. MC Fragen Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ ist beschränkt für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

☑ Ja

☐ Nein

(b) $\sup(]a, b]) = b$ für alle $a < b$ in $\mathbb{R}$.

☑ Ja

☐ Nein

(c) Wenn $A \subset B$ und B ein Maximum besitzt, dann besitzt auch A ein Maximum.

☐ Ja

☑ Nein

(d) Wenn $A \subset B$ und A ein Maximum besitzt, dann besitzt auch B ein Maximum.

☐ Ja

☑ Nein

(e) $\inf\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\} > 0$

☐ Ja

☑ Nein

1.2. Beispiel Geben Sie ein Beispiel von einer Teilmenge von $\mathbb{R}$, die beschränkt ist, aber weder Maximum noch Minimum besitzt.

Lösung: Ein Beispiel wäre $(0, 1) \subset \mathbb{R}$.

1.3. Die reelen Zahlen Nur mittels den Axiomen aus der Vorlesung, zeigen Sie, dass

(a) Wenn $x > 0$, dann $\frac{1}{x} > 0$

Lösung: Um dies zu beweisen nehmen wir an, dass es ein $x > 0$ gibt mit $\frac{1}{x} \leq 0$ und leiten dann einen Widerspruch her. Da die Ordnung auf $\mathbb{R}$ mit Multiplikation konsistent ist, folgt dass

$$(x > 0) \wedge (\frac{1}{x} \leq 0) \Rightarrow x \cdot \frac{1}{x} \leq x \cdot 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0,$$

was ein Widerspruch ist. Dies zeigt die Behauptung.

(b) Wenn $0 \leq x \leq 1$, dann $0 \leq x^2 \leq x \leq 1$

Lösung: Diese Aussage folgt wiederum von der Konsistenz der Ordnung auf $\mathbb{R}$ mit Multiplikation:

$$x \geq 0 \Rightarrow x \cdot x \geq 0 \cdot x \Leftrightarrow x^2 \geq 0$$

und

$$(x \geq 0) \wedge (x \leq 1) \Rightarrow x \cdot x \leq 1 \cdot x \Leftrightarrow x^2 \leq x.$$

Damit folgt $0 \leq x^2 \leq x \leq 1$.

(c) Wenn $0 < x \leq y$, dann $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

Lösung: Aus (a) folgt sofort, dass $0 < \frac{1}{y}$. Somit müssen wir nur $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ zeigen. Wir nehmen wiederum an, dass $\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$ und leiten dann einen Widerspruch her. Da $x, y > 0$ gilt wegen der Konsistenz der Ordnung auf $\mathbb{R}$ mit Multiplikation, dass $x \cdot y > 0$. Unsere Annahme ergibt damit

$$(x \cdot y) \cdot \frac{1}{y} > (x \cdot y) \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow x > y,$$

was ein Widerspruch ist.

(d) Wenn $x, y \geq 0$, dann

$$x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$$

Lösung: Zunächst zeigen wir $\Rightarrow$. Sei also $x, y \geq 0$ mit $x \leq y$. Wegen der Konsistenz der Ordnung auf $\mathbb{R}$ mit Multiplikation haben wir

$$x^2 = x \cdot x \leq x \cdot y \leq y \cdot y = y^2, \tag{1}$$

was $\Rightarrow$ zeigt. Um $\Leftarrow$ zu zeigen, zeigen wir

$$x > y \Rightarrow x^2 > y^2,$$

was eine äquivalente Aussage ist. Diese Aussage folgt genau wie (1).

1.4. Supremum und Infimum I Seien $A := \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und $B := \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\inf(A)$ und $\inf(B)$ falls sie existieren.

Lösung: Man sieht sofort, dass 0 eine untere Schranke sowohl für A als auch für B ist. Somit existieren $\inf(A)$ und $\inf(B)$. Weder A noch B haben eine obere Schranke, weil

$$n \leq 2^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Dies sieht man am einfachsten mittels Induktion: Offensichtlich gilt $1 \leq 2$. Nehmen wir nun an, dass $n \leq 2^n$ für alle $1 \leq n \leq k$ für irgendein $k \in \mathbb{N}$, dann gilt auch

$$k + 1 \leq 2k \leq 2 \cdot 2^k \leq 2^{k+1},$$

was den Induktionsbeweis für (2) beendet. Da $\mathbb{N}$ keine obere Schranke besitzt folgt aus (2), dass auch A und B keine obere Schranken besitzen. Damit existieren weder $\sup(A)$, noch $\sup(B)$. Um $\inf(B)$ zu bestimmen bemerken wir, dass $2 \leq x$ für alle $x \in B$ und $2 \in B$. Daraus folgt, dass $\inf(B) = 2$. Wir behaupten, dass $\inf(A) = 0$. Um dies zu beweisen, sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen (2) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$\frac{1}{\epsilon} < 2^{n_0}.$$

Dies impliziert, dass $2^{-n_0} < \epsilon$. Da $2^{-n_0} \in A$ folgt, dass $\inf(A) < \epsilon$. Da auch $0 \leq \inf(A)$ und $\epsilon > 0$ beliebig war folgt die Behauptung.

1.5. Supremum und Infimum II Bestimmen Sie zunächst, ob die folgende Mengen eine obere (bzw. untere) Schranke besitzen. Wenn Ja, bestimmen Sie das Supremum (bzw. Infimum). Welche Mengen besitzen Maximum (bzw. Minimum)?

$$M_1 = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\right\}, \qquad M_2 = \left\{\frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R}\right\},$$
$$M_3 = \bigcup_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \qquad M_4 = \left\{\frac{x+y}{z} : x, y > 0,\ z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}.$$

Lösung: M_1 ist beschränkt von oben durch 2, weil $1/n \leq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$, und dieser Wert wird für $n = 1$ angenommen, also $\sup M_1 = \max M_1 = 2$. M_1 ist beschränkt von unten durch 1, weil $1 + 1/n \geq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$; aus dem archimedischen Prinzip folgt, dass $\forall \epsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $1/n \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$, daher

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Das impliziert, aus der Definition von Infimum, dass $\inf M_1 = 1$. Da $1 + 1/n$ immer strikt grösser als 1 ist, $1 \notin M_1$, besitzt M_1 also kein Minimum.

M_2 ist beschränkt von unten durch 0, weil ihre Elemente positiv sind. Falls $x = 0$, gilt $\frac{|0|}{|0|+1} = 0$, damit schliessen wir, dass $\inf M_2 = \min M_2 = 0$. M_2 ist beschränkt von oben durch 1, weil für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $1 + |x| > |x|$, also $\frac{|x|}{|x|+1} < 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und dadurch $\sup M_2 \leq 1$. Eine Möglichkeit, $\sup(M_2) = 1$ zu zeigen, ist: wir betrachten $x = n \in \mathbb{N}_{>0}$ und bemerken, dass

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Aus dem archimedischen Prinzip, für jedes $\epsilon > 0$ existiert n_0 so dass $1/n \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$, also

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{1+\epsilon} = 1 + \left(\frac{1}{1+\epsilon} - 1\right) = 1 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \quad \forall n \geq n_0.$$

Wir bemerken, dass weil ϵ beliebig klein sein kann, kann $\epsilon/(1+\epsilon)$ ebenso klein sein, wie man will. Wir schliessen, dass $\sup M_2 = 1$. M_2 besitzt kein Maximum, weil für jedes $x \in \mathbb{R}$, $\frac{|x|}{|x|+1} < 1$ strikt: es ist nicht möglich, den Wert 1 zu erreichen.

Wir schreiben M_3 ungekürzt:

$$M_3 = \bigcup_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] = \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] \cup \cdots$$

Es ist dann klar, dass $\sup M_3 = \max M_3 = 1$. Wir sehen, dass $1/n \in M_3$ für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$: aus dem archimedischen Prinzip schliessen wir, wie für M_1, dass $\inf M_3 = 0$, aber das Minimum nicht erreicht wird, weil $0 \notin M_3$.

Was M_4 betrifft, sehen wir, dass für fixierte $x, y > 0$ (z.B. $x = 1$, $y = 1$) der Ausdruck $\frac{x+y}{z}$, falls $z > 0$ ist, gegen $+\infty$ divergiert wenn z nach 0 strebt: z.B. falls $z = 1/n$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, gilt

$$\frac{x+y}{z} = n(x+y),$$

also ist es für jedes $M > 0$ immer möglich, ein n zu finden, so dass $n(x+y) > M$; somit folgt $\sup M_4 = +\infty$, d.h. M_4 ist unbeschränkt von oben. Analog, wenn für fixierte $x, y > 0$, $z = -1/n$ betrachtet wird, divergiert der Ausdruck gegen $-\infty$, also $\inf M_4 = -\infty$, d.h. M_4 ist unbeschränkt von unten.

1.6. Supremum und Infimum III Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ so dass

$$n_0 \leq x < n_0 + 1. \tag{3}$$

Wir definieren $\langle x\rangle := x - n_0$, so dass

$$0 \le \langle x\rangle < 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Sei A die Menge, die durch

$$A := \{\langle n\sqrt{2}\rangle \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

definiert ist. Zeigen Sie, dass A begrenzt ist, und dass

$$0,99 \le \sup(A) \le 1.$$

Lösung: Wegen (4) ist A offensichtlich beschränkt mit $\sup(A) \le 1$. Mittels eines Taschenrechners berechnet man, dass

$$\langle 70\sqrt{2}\rangle \approx 0,9949494.$$

Damit folgt, dass $0,99 \le \sup(A)$.

1.7. Supremum und Infimum IV Sei

$$A := \{1, \tfrac{11}{10}, \tfrac{111}{100}, \tfrac{1111}{1000}, \ldots\}.$$

Zeigen Sie, dass A beschränkt ist und bestimmen Sie $\inf(A)$ und $\sup(A)$.

Lösung: Wir schreiben

$$a_n = \frac{1\overbrace{11\cdots 1}^{n}}{1\underbrace{00\cdots 0}_{n}} = 1,\underbrace{11\ldots 1}_{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt, dass

$$\inf(A) = \min(A) = 1$$

und

$$x \le 1,\underbrace{111111\ldots}_{\infty} \quad \forall\, x \in A.$$

Wir behaupten, dass

$$\sup(A) = a$$

wobei a durch

$$a := 1,\underbrace{111111\ldots}_{\infty}$$

definiert ist. Um diese Behauptung zu zeigen, sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$a - a_{n_0} = 0,\underbrace{00\ldots0}_{n_0}111\ldots < \epsilon,$$

was $a - \epsilon < a_{n_0} \leq \sup(A)$ entspricht. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt dass

$$\sup(A) = a.$$

1.8. Supremum und Infimum V Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass $A + B$ beschränkt ist und, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$. Gilt auch $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$?

Lösung: Da A (bzw. B) beschränkt ist gibt es eine obere Schranke $C_A \in \mathbb{R}$ (bzw. $C_B \in \mathbb{R}$). Offensichtlich ist $C_A + C_B$ eine obere Schranke für $A + B$. Ebenso sieht man, dass $A + B$ eine untere Schranke besitzt. Damit ist $A + B$ beschränkt. Aus

$$a \leq \sup(A) \quad \forall\, a \in A$$
$$b \leq \sup(B) \quad \forall\, b \in B$$

folg, dass $\sup(A) + \sup(B)$ eine obere Schranke für $A + B$ ist. Damit folgt

$$\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B).$$

Um die umgekehrte Ungleichung zu sehen, sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen der Definition von sup gibt es $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$, so dass

$$\sup(A) - \frac{\epsilon}{2} \leq a_0$$
$$\sup(B) - \frac{\epsilon}{2} \leq b_0.$$

Damit folgt,

$$\sup(A) + \sup(B) - \epsilon = \sup(A) - \frac{\epsilon}{2} + \sup(B) - \frac{\epsilon}{2} \leq a_0 + b_0 \leq \sup(A + B).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus, dass $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$. Ebenso sieht man, dass $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.