

2.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Seien (a_n) , (b_n) und (c_n) Folgen in \mathbb{R} mit $c_n = a_n + b_n$. Dann:

falls $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n;$$

falls $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existieren, existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

falls (a_n) und (b_n) beschränkt sind, muss (c_n) beschränkt sein.

falls (c_n) konvergiert, konvergiert wenigstens eine der Folgen (a_n) und (b_n) ;

(b) Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{R} . Dann

falls $\epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt, dann konvergiert (a_n) ;

falls (a_n) konvergiert, ist die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ konvergent;

falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ nach 0 konvergiert, ist (a_n) konvergent;

falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$, und $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, dann ist (a_n) konvergent.

(c) Sei $a_n = \frac{1}{n^2+1}$. Dann gilt $|a_n| < 0.01$:

sobald $n \geq 9$,

sobald $n > 9$,

sobald $n > 10$,

nie, so lange $n \leq 10$.

2.2. Folgen Man untersuche folgende reelle Folgen jeweils auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right),$$

$$b_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n},$$

$$c_n = \sqrt{n(n+2)} - n,$$

$$d_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2},$$

$$e_n = \frac{e_{n-1} + e_{n-2}}{2}, \quad e_1 = 0, \quad e_2 = 1.$$

Hinweis. Finden Sie eine explizite Formel für die Differenzen $F_n := f_n - f_{n-1}$.

2.3. Fibonacci (schriftlich) Die reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(a) Beweisen Sie folgende explizite Formel durch vollständige Induktion.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

(b) Zeigen Sie, dass $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen die goldene Zahl $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

(c) Finden Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass folgende Aussage gilt.

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq n : \quad \left| b_m - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| \leq \frac{1}{100}.$$

2.4. Folgen und komplexe Zahlen Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Hinweis. Bestimmen Sie ein Ausdruck für

$$1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1}.$$

2.5. Folgen Sei A ein Algorithmus dessen Input eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist und dessen Arbeitszeit für Input n gleich $a_n \geq 0$ ist. Wir nehmen an, dass

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass

$$a_n \leq Cn \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$