2.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $c_n = a_n + b_n$. Dann:

☐ falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n;$$

☑ falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ existieren, existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} b_n;$$

☑ falls (a_n) und (b_n) beschränkt sind, muss (c_n) beschränkt sein.

☐ falls (c_n) konvergiert, konvergiert wenigstens eine der Folgen (a_n) und (b_n);

(b) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann

☐ falls $\epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt, dann konvergiert (a_n);

☑ falls (a_n) konvergiert, ist die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ konvergent;

☐ falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ nach 0 konvergiert, ist (a_n) konvergent;

☑ falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$, und $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, dann ist (a_n) konvergent.

(c) Sei $a_n = \frac{1}{n^2+1}$. Dann gilt $|a_n| < 0.01$:

☐ sobald $n \geq 9$,

☑ sobald $n > 9$,

☐ sobald $n > 10$,

☐ nie, so lange $n \leq 10$.

2.2. Folgen Man untersuche folgende reelle Folgen jeweils auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \cos(\tfrac{\pi}{3}n), \qquad b_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n},$$

$$c_n = \sqrt{n(n+2)} - n, \qquad d_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2},$$

$$e_n = \frac{e_{n-1} + e_{n-2}}{2}, \quad e_1 = 0,\ e_2 = 1.$$

Hinweis. Finden Sie eine explizite Formel für die Differenzen $F_n := f_n - f_{n-1}$.

Lösung: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn es gilt $|a_n| = |\cos(\frac{\pi}{3}n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner gilt $a_{6k} = \cos(2\pi k) = 1$ und $a_{6k+3} = \cos(2\pi k + \pi) = -1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht monoton und nicht konvergent.

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton fallend und konvergiert gegen 0, denn

$$b_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+4} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}}.$$

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton wachsend und konvergiert gegen 1, denn

$$\begin{aligned} c_n = \sqrt{n(n+2)} - n &= \frac{\left(\sqrt{n(n+2)} - n\right)\left(\sqrt{n(n+2)} + n\right)}{\sqrt{n(n+2)} + n} \\ &= \frac{n(n+2) - n^2}{\sqrt{n(n+2)} + n} = \frac{2n}{\sqrt{n(n+2)} + n} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton fallend und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$, denn

$$d_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Das Rekursionsgesetz $e_1 = 0,\ e_2 = 1,\ e_n = \frac{1}{2}(e_{n-1} + e_{n-2})$ für $3 \leq n \in \mathbb{N}$ impliziert

$$E_n := e_n - e_{n-1} = \tfrac{1}{2}(e_{n-1} + e_{n-2}) - e_{n-1} = \tfrac{1}{2}(-e_{n-1} + e_{n-2}) = -\tfrac{1}{2}E_{n-1}.$$

Es folgt

$$E_n = (-\tfrac{1}{2})^{n-3} E_3 = (-\tfrac{1}{2})^{n-3}(e_3 - e_2) = (-\tfrac{1}{2})^{n-2}.$$

Das Folgenglied e_n für $n \geq 3$ lässt sich schreiben als Teleskopsumme

$$\begin{aligned} e_n &= e_2 + \sum_{k=3}^{n}(e_k - e_{k-1}) = 1 + \sum_{k=3}^{n} E_k = 1 + \sum_{k=3}^{n} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{k-2} \\ &= 1 + \sum_{l=1}^{n-2} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{l} = \sum_{l=0}^{n-2} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{l} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

wobei zuletzt die Formel der geometrischen Reihe verwendet wird. Damit ist die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und konvergiert gegen $\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$, ist aber nicht monoton.

2.3. Fibonacci (schriftlich) Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(a) Beweisen Sie folgende explizite Formel durch vollständige Induktion.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Lösung: Es sei $\Phi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ und $\Psi := \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Zu beweisen ist $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n)$. Man beachte, dass a_{n+2} sowohl von a_{n+1} als auch a_n abhängt. Die vollständige Induktion muss daher bei $n = 1$ und $n = 2$ verankert werden und der Induktionsschritt schliesst von n und $n+1$ auf $n+2$.

Verankerung. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^1 - \Psi^1) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = 1 = a_1, \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^2 - \Psi^2) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4\sqrt{5}}{4}\right) = 1 = a_2. \end{aligned}$$

Induktionsannahme. Für gewisses $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \Psi^n\right), \qquad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}\right).$$

Induktionsschritt. Wir folgern die Behauptung für $n+2$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \Psi^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}\right) && \text{(Induktionsannahme)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n(1+\Phi) - \Psi^n(1+\Psi)\right). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, falls $(1+\Phi) = \Phi^2$ und $(1+\Psi) = \Psi^2$ gilt. In der Tat ist

$$\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \Phi + 1,$$
$$\Psi^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \Psi + 1.$$

Somit ist wie behauptet $a_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+2} - \Psi^{n+2})$.

(b) Zeigen Sie, dass $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen die goldene Zahl $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

Lösung: Aus der expliziten Formel bewiesen in der vorherigen Aufgabe folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} |b_m - \Phi| &= \left|\frac{a_{m+1}}{a_m} - \Phi\right| = \left|\frac{\Phi^{m+1} - \Psi^{m+1}}{\Phi^m - \Psi^m} - \Phi\right| \\ &= \left|\frac{\Phi\Psi^m - \Psi^{m+1}}{\Phi^m - \Psi^m}\right| = \left|\frac{\Phi - \Psi}{\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)^m - 1}\right| \leq \frac{\sqrt{5}}{|\frac{\Phi}{\Psi}|^m - 1}, \end{aligned}$$

wobei $\Phi - \Psi = \sqrt{5}$ und $\left|\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)^m - 1\right| \geq |\frac{\Phi}{\Psi}|^m - 1$ verwendet wird.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Dann folgt aus der vorherigen Abschätzung

$$\begin{aligned} |b_m - \Phi| < \varepsilon \;&\Leftarrow\; \sqrt{5} < \varepsilon\Big(|\tfrac{\Phi}{\Psi}|^m - 1\Big) \\ &\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{5} + 1 < |\tfrac{\Phi}{\Psi}|^m \\ &\Leftrightarrow\; \log\Big(\tfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{5} + 1\Big) < m \log|\tfrac{\Phi}{\Psi}| \\ &\Leftrightarrow\; m > \frac{\log\Big(\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{5} + 1\Big)}{\log|\frac{\Phi}{\Psi}|} =: N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Es sei $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ die Zahl $N(\varepsilon)$ aufgerundet. Somit existiert für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sodass $|b_m - \Phi| < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $m \geq n(\varepsilon)$ folgt. Das heisst nach Definition, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Φ konvergiert.

(c) Finden Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass folgende Aussage gilt.

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n: \quad \left|b_m - \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \leq \tfrac{1}{100}.$$

Lösung: Gesucht ist die Zahl $n(\varepsilon)$ aus Teilaufgabe (b) für $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Also berechnen wir

$$N(\tfrac{1}{100}) = \frac{\log\Big(100\sqrt{5} + 1\Big)}{\log|\frac{\Phi}{\Psi}|} = \frac{\log\Big(100\sqrt{5} + 1\Big)}{\log\left|\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right|} \approx 5.625746.$$

Es folgt $n(\frac{1}{100}) = 5$, das heisst für alle natürlichen Zahlen $m > 5$ gilt $|b_m - \Phi| < \frac{1}{100}$.

2.4. Folgen und komplexe Zahlen Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Hinweis. Bestimmen Sie ein Ausdruck für

$$1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}.$$

Lösung: Zunächst behaupten wir, dass

$$1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} \tag{1}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen dies mittels Induktion.

Verankerung. Offensichtlich gilt (1) für $n = 1$, da

$$1 = \frac{1 - 2q + q^2}{(1-q)^2}.$$

Induktionsannahme. Für gewisses $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

Induktionsschritt. Wegen unserer Induktionsannahme gilt nun

$$\begin{aligned}
1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} + (n+1)q^n &= \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} + (n+1)q^n \\
&= \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} \\
&\quad + \frac{(n+1)q^n(1 + q^2 - 2q)}{(1-q)^2} \\
&= \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} \\
&\quad + \frac{(n+1)q^n + (n+1)q^{n+2} - 2(n+1)q^{n+1}}{(1-q)^2} \\
&= \frac{1 - (n+2)q^{n+1} + (n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2},
\end{aligned}$$

was den Induktionsschritt beweist.

Wegen (1) und Beispiel 3.2.2. iv) in Struwes Skript folgt jetzt, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$$

konvergiert, so lange $|q| < 1$ und dass der Grenzwert gleich

$$\frac{1}{(1-q)^2}$$

ist.

2.5. Beschränkte Folgen Sei A ein Algorithmus dessen Input eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist und dessen Arbeitzeit für Input n gleich $a_n \geq 0$ ist. Wir nehmen an, dass

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad \forall\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass

$$a_n \leq Cn \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Lösung: Wegen unserer Annahme haben wir

$$\begin{aligned}
a_n = a_{\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n}} &\leq a_{\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n-1}} + a_1 \\
&\leq a_{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-2}} + a_1 + a_1 \\
&\ \vdots \\
&\leq \underbrace{a_1 + \cdots + a_1}_{n} = na_1.
\end{aligned}$$

Somit können wir also $C = a_1$ nehmen.