3.1. MC-Fragen: Reihen und Cauchy-Folgen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern, d.h. $a_n \geq 0$ für jedes n. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass die Reihe divergiert?

- ☐ $a_n \geq 1/n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$;
- ☐ $a_n > 2^{-n}$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$;
- ☐ es existiert $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \geq 1/\sqrt{n}$ für jedes $n \geq N_0$.

(b) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann

- ☐ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$;
- ☐ konvergiert $(x_n)_n$ gegen 0;
- ☐ ist x_n beschränkt.

3.2. Induktive Folge

(a) Sei $(a_n)_n$ die Folge induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2}, \\ a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \geq 2. \end{aligned}$$

(i) Beweisen Sie, dass $(a_n)_n$ von oben durch 2 beschränkt ist.

(ii) Berechnen Sie, falls existent, den Grenzwert von $(a_n)_n$.

(b) Sei $(a_n)_n$ die Folge induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{a_n + 1} \quad \text{für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tipp: Induktive Folge untersucht man mit Induktion.

3.3. Reihen in $\mathbb{R}$ mit reellem Parameter Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent? Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind absolut konvergent? Benutzen Sie die Kriterien aus der Vorlesung.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{1+n^2x^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+|x|^n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^x}{n^n}$.

3.4. Reihen reellen Zahlen Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{n+1}}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$.

Bestimmen Sie, falls existent, die Werte von (b) und (d).