3.1. MC-Fragen: Reihen und Cauchy-Folgen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern, d.h. $a_n \geq 0$ für jedes n. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass die Reihe divergiert?

☐ $a_n \geq 1/n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$;

Ungenügend: zum Beispiel betrachten wir

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{falls } n \text{ Zweierpotenz,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In anderen Worten: falls $n = 2^k$ für ein k, dann $a_n = 2^{-k}$, falls n nicht Zweierpotenz, ist $a_n = 0$. Es gilt $a_n = 1/n$ für jedes n Zweierpotenz, also undendliche n, aber es gilt auch für jedes n, dass $a_n \leq 2^{-n}$, also ist die Reihe absolut konvergent.

☐ $a_n > 2^{-n}$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$;

Ungenügend: die Reihe mit Gliedern $a_n = 2 \cdot 2^{-n}$ ist absolut konvergent.

☑ es existiert $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \geq 1/\sqrt{n}$ für jedes $n \geq N_0$.

Lösung: $\sum_{N=N_0}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ ist divergent, also weil

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{N_0-1} a_n}_{\text{bestimmte Zahl}} + \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{N_0-1} a_n + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

gilt, ist die Reihe divergent.

(b) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann

☐ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$;

Falsch: zum Beispiel ist $x_n = 1/n$ Cauchy (weil konvergent), aber wie bekannt ist $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergent.

☐ konvergiert $(x_n)_n$ gegen 0;

Falsch: jede Cauchy-Folge ist konvergent, nicht notwendigerweise mit Grenzwert 0.

☑ ist x_n beschränkt.

Lösung: jede Cauchy-Folge ist konvergent, also beschränkt.

3.2. Induktive Folge

(a) Sei $(a_n)_n$ die Folge induktiv definiert durch:

$$a_1 = \sqrt{2},$$
$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(i) Beweisen Sie, dass $(a_n)_n$ von oben durch 2 beschränkt ist.

(ii) Berechnen Sie, falls existent, den Grenzwert von $(a_n)_n$.

Lösung: Wir erinnern uns daran, dass die Wurzel $x \mapsto \sqrt{x}$ monoton wachsend ist, das heisst, falls $0 \leq x \leq y$, dann $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$. Insbesondere gilt, für alle $x, y \geq 0$, immer $\sqrt{x+y} \geq \sqrt{x}$.

(i) Wir sehen, dass

$$\begin{aligned}
a_2 &= \sqrt{2 + \sqrt{2}} \leq \sqrt{4} = 2,\\
a_3 &= \sqrt{2 + a_1} \leq \sqrt{2+2} \leq 2,\\
a_4 &= \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2,\\
&\dots
\end{aligned}$$

also wollen wir durch Induktion beweisen, dass $a_n \leq 2$ für alle n gilt.

Verankerung: für $n = 1$, $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$.

Induktionsschritt: nehmen wir an, dass $a_n \leq 2$. Dann gilt:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2,$$

da die Wurzelfunktion monoton wachsend ist. Dies zeigt, dass die Folge beschränkt ist.

(ii) Wir benutzen nochmals Induktion um zu beweisen, dass die Folge monoton wachsend ist.

Verankerung: für $n = 2$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \geq \sqrt{2} = a_0$.

Induktionsschritt: nehmen wir an, dass $a_n \geq a_{n-1}$. Dann sehen wir, dass

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \geq \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n,$$

wie gewollt. Wir haben bewiesen, dass $(a_n)_n$ beschränkt und wachsend ist: durch Satz 3.3.1 (Monotone Konvergenz) in Struwes Skript folgern wir, dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$ existiert. Weil $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, schliessen wir durch Satz 3.3.2 in Struwes Skript, dass

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n+1} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + a},$$

also

$$a^2 - 2 - a = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung 2. Ordnung sind 2 und -1: weil immer $a_n > 0$ gilt, ist dann nur $a = 2$ relevant. Schlussendlich erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}} = 2.$$

(b) Sei $(a_n)_n$ die Folge induktiv definiert durch:

$$a_1 = 1,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tipp: Induktive Folge untersucht man mit Induktion.

Lösung: Wir sehen, dass

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \\ a_3 &= \frac{1/2}{1+1/2} = \frac{1}{3}, \\ a_4 &= \frac{1/3}{1+1/3} = \frac{1}{4}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Also ist es "klar" das die Grenzwert 0 ist. Aber wir müssen dies streng beweisen! Die Strategie ist wie in (a): wir zeigen, dass die Folge beschränkt und monoton fallend ist, um Satz 3.3.1 in Struwes Skript zu benutzen. Weil $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = a_n/(1 + a_n)$, folgt

$$0 \leq a_n \leq 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} \leq a_n,$$

weil der Nenner immer grösser ist als der Zähler. Das zeigt Beschränktkeit und Monotonie. Wir schliessen, dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ existiert und gilt

$$a = \frac{a}{1+a} \Leftrightarrow a^2 + a = a \Leftrightarrow a = 0.$$

3.3. Reihen in $\mathbb{R}$ mit reellem Parameter Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent? Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind absolut konvergent? Benutzen Sie die Kriterien aus der Vorlesung.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{1+n^2x^2}$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+|x|^n}$,

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^x}{n^n}$.

Lösung: Wir bezeichnen die Folgenglieder jeweils a_n.

(a) Falls $|x| \geq 1$ sehen wir, dass $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |x|^{n!} \neq 0$, also muss die Reihe divergieren. Falls $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n,$$

und die rechte Seite ist eine Geometrische Reihe mit Basis $|x| < 1$, also konvergent.

Zusammenfassend: Die Reihe ist für $|x| \geq 1$ divergent und für $|x| < 1$ absolut konvergent.

(b) Falls $x = 0$, sehen wir, dass $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \neq 0$, also muss die Reihe divergieren. Falls $x \neq 0$, wir sehen, dass

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}x^2},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}},$$

und die Reihe auf der rechten Seite ist bekanntlich konvergent, weil $3/2 > 1$ (Beispiel 3.7.4). Wir folgern, dass die Reihe absolut konvergent ist.

Zusammenfassend: Die Reihe ist für $x = 0$ divergent und für $x \neq 0$ absolut konvergent.

(c) Falls $x = 1$ oder $x = -1$, ist $a_n = 1/2$ für jedes n, also divergiert die Reihe. Falls $|x| > 1$, wir sehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{|x|^n} = 1 \neq 0,$$

also muss die Reihe divergent sein. Falls $|x| < 1$, gilt

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{1 + |x|^n} \leq |x|^n.$$

Somit gilt wie in (a):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n < \infty.$$

Folglich ist die Reihe absolut konvergent.

Zusammenfassend: Die Reihe ist für $|x| \geq 1$ divergent und für $|x| < 1$ absolut konvergent.

(d) Falls $x = 1$ oder $x = -1$, ist $a_n = 1/2$ für jedes n, also divergiert die Reihe. Falls $|x| < 1$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + x^{2n}} = 1,$$

d.h. die Reihe ist divergent. Falls schlussendlich $|x| > 1$, gilt

$$\left|\frac{1}{1 + x^{2n}}\right| \leq \frac{1}{(x^2)^n},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2)^n}.$$

Damit schliessen wir wie in (a), dass die Reihe absolut konvergent ist.

Zusammenfassend: die Reihe ist für $|x| \leq 1$ divergent und für $|x| > 1$ absolut konvergent.

(e) Wir benutzen das Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^x}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n!)^x} = \frac{((n+1)n!)^x}{(n+1)^n(n+1)} \frac{n^n}{(n!)^x} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (n+1)^{x-1}.$$

Weil

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}(1+n)^{x-1} = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x > 1, \\ 1 & \text{falls } x = 1, \\ 0 & \text{falls } x < 1, \end{cases}$$

schliessen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x > 1, \\ 1/\mathrm{e} & \text{falls } x = 1, \\ 0 & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

Damit erhalten wir, dass die Reihe für $x \leq 1$ absolut konvergent und für $x > 1$ divergent ist.

3.4. Reihen reellen Zahlen Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{n+1}}$, **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$.

Bestimmen Sie, falls existent, die Werte von (b) und (d).

Lösung: Wir bezeichnen mit a_n das Glied jeder Folge.

(a) Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz. Wir benutzen das Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{((n+1)n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)},$$

also $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/4 < 1$. Damit schliessen wir, das die Reihe absolut konvergent ist.

(b) Die Reihe ist einfach die harmonische Reihe ohne die ersten 100 Glieder, ist also divergent.

(c) Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz. Wir benutzen das Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{n^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{5}{n\sqrt[n]{n}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, gilt $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 5/n = 0 < 1$, also ist die Reihe absolut konvergent.

(d) Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz, und wir bemerken, dass diese Reihe ähnlich wie die Teleskopsumme ist. Wir suchen zuerst a und b so dass

$$\frac{1}{n(n+4)} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+4}.$$

Wir sehen, dass

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n+4} = \frac{(a-b)n + 4a}{n(n+4)},$$

also finden wir $a = b = 1/4$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \dots\right).$$

Also folgern wir, wie für die Teleskopsumme, dass die Partialsummen die Form

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4}\right)$$

haben. Somit schliessen wir, dass die Reihe absolut konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{48}$$

ist.