4.1. MC Frage: Die komplexe Exponentialfunktion Betrachten Sie $z \mapsto \operatorname{Exp}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ für $z \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

☑ Falls z reell ist, ist $\operatorname{Exp}(z)$ reell.

Richtig: Das ist wahr weil jedes Glied der Reihe reell ist. Also ist die Summe reell.

☐ Exp ist surjektiv; d.h. für jedes $w \in \mathbb{C}$ existiert ein $z \in \mathbb{C}$ so dass $\operatorname{Exp}(z) = w$.

Falsch: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt immer $\operatorname{Exp}(z) \neq 0$.

4.2. MC Frage: Konvergenz und absolute Konvergenz Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☑ $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergiert absolut falls beide Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

absolut konvergent sind.

Richtig: Wegen $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$ haben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < +\infty.$$

Somit ist $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ absolut konvergent.

☑ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ existiert, falls

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

absolut konvergent sind.

Richtig: Da $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ ist haben wir

$$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq N : \quad |a_n| \leq 1.$$

Nun folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| = \sum_{n=0}^{N} |a_n b_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n b_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

Somit ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ sogar absolut konvergent.

☐ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ existiert, falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existiert.

Falsch: Seien $a_0 := 1$, $a_1 := -1$ und

$$a_{2n} = \frac{1}{2n}, \quad a_{2n+1} = -\frac{1}{2n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{falls } N \text{ gerade ist} \\ 0 & \text{falls } N \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt also

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0.$$

Da aber $a_0 = 1$, $-a_1 = 1$ und

$$(-1)^{2n} a_{2n} = \frac{1}{2n}, \quad (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = \frac{1}{2n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

existiert $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ nicht.

4.3. Cauchy-Kriterium Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen, sodass

$$|q_n - q_{n+1}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Folgt daraus, dass $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist? Finden Sie ein Gegenbeispiel oder beweisen Sie die Behauptung.

Lösung: $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Definition eine Cauchy-Folge, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Es genügt *nicht*, dass $|q_n - q_{n+1}| \to 0$ für $n \to \infty$, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt.

$$q_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Dann ist $q_n \in \mathbb{Q}$ und es gilt $|q_n - q_{n+1}| = |-\frac{1}{n+1}| \to 0$ für $n \to \infty$, aber $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge, denn

$$q_{2n} - q_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

4.4. Konvergenzbereiche Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der folgenden Reihen, also die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, sodass die Reihe konvergiert.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{2nx}$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}x^n}{(1-x)^{2n}}, \quad x \neq 1.$

Lösung:

(a) Die Reihe über $a_n = n!\, x^n$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium nur für $x = 0$, denn es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\, x}{n!}\right| = (n+1)|x| = \begin{cases} < 1 & \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \text{falls } x = 0, \\ > 1 & \forall\, n \geq \frac{1}{|x|}, \quad \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

(b) Die Reihe über $b_n = 2^n e^{2nx} = (2e^{2x})^n$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, falls $|2e^{2x}| = 2e^{2x} < 1$, was äquivalent zu $x < -\frac{1}{2}\ln(2)$ ist.

(c) Die Reihe über $c_n = \frac{2^{-n}x^n}{(1-x)^{2n}} = \left(\frac{\frac{1}{2}x}{(1-x)^2}\right)^n$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, falls

$$\left|\frac{\frac{1}{2}x}{(1-x)^2}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}|x| < (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2.$$

Im Fall $x \geq 0$ ist die Bedingung äquivalent zu $0 < 1 - \frac{5}{2}x + x^2 = (x-2)(x-\frac{1}{2})$. Die Parabel ist nach oben geöffnet und damit positiv links und rechts von beiden Nullstellen. Die Bedingung ist somit äquivalent zu $(0 \leq x < \frac{1}{2}) \vee (2 < x)$.

Im Fall $x \leq 0$ lautet die Bedingung $0 < 1 - \frac{3}{2}x + x^2$. Da diese Parabel nach oben geöffnet ist und wegen $(\frac{3}{2})^2 - 4 < 0$ keine Nullstellen hat, ist die Bedingung für alle $x \leq 0$ erfüllt. Der Konvergenzbereich ist somit $\{x \in \mathbb{R} \mid (x < \frac{1}{2}) \vee (2 < x)\}$.

4.5. Annäherung

(a) Sei $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass

$$a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

existiert. Sei

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Bewiesen Sie, dass

$$|a - s_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Nähern Sie a mit 3 Dezimalzahlen an.

Lösung: Wir haben

$$\begin{aligned} s_{n+l} - s_n &= \sum_{k=1}^{n+l} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{n+l} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+3} + \frac{(-1)^{n+3}}{n+4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+l-1}}{n+l} \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \cdots + (-1)^{l-1} \frac{1}{n+l} \right). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} (-1)^n (s_{n+l} - s_n) &= \frac{1}{n+1} \underbrace{- \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}}_{\leq 0} \underbrace{- \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5}}_{\leq 0} - \cdots \underbrace{+ (-1)^{l-1} \frac{1}{n+l}}_{\leq 0} \\ &\leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Anderseits gilt auch

$$\begin{aligned} (-1)^n (s_{n+l} - s_n) &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} - \cdots + (-1)^{l-1} \frac{1}{n+l} \\ &\geq - \frac{1}{n+2} + \underbrace{\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{n+5} -}_{\geq 0} \cdots \underbrace{+ (-1)^{l-1} \frac{1}{n+l}}_{\geq 0} \\ &\geq - \frac{1}{n+2} \geq - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$|s_{n+l} - s_n| \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Somit folgt

$$|a - s_n| = \lim_{l \to \infty} |s_{n+l} - s_n| \leq \frac{1}{n+1},$$

was die Behauptung zeigt.

Unsere bisherigen Berechnungen zeigen, dass

$$a \approx s_{1000} = 0.6926474$$

eine gute Annäherung ist.

(b) Sei $a_n := \frac{1}{n!}$, so dass $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Beweisen Sie, dass

$$|e - s_n| \leq \frac{3}{(n+1)!},$$

wobei $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Nähern Sie e mit 8 Dezimalzahlen an.

Lösung:

Offensichtlich haben wir $s_n \leq e$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} s_{n+m} - s_n &= \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{(n+1)!}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{l=1}^{m} \frac{(n+1)!}{(l+n)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(n+1)!}{(k+1+n)!} \right). \end{aligned}$$

Da

$$\frac{(n+1)!}{(k+n+1)!} = \frac{1}{(k+n+1)(k+n)(k+n-1)\cdots(n+2)}$$

und

$$(k+n+1)(k+n)(k+n-1)\cdots(n+2) \geq k^3$$

für $n \geq 1$, haben wir

$$s_{n+m} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(n+1)!}{(k+1+n)!} \right) \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^3} \right).$$

Damit gilt

$$e - s_n \leq \lim_{m \to \infty} (s_{n+m} - s_n) \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \right).$$

Wir wissen schon, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \leq 2$$

und damit haben wir

$$e - s_n \leq \lim_{m\to\infty}(s_{n+m} - s_n) \leq \frac{1}{(n+1)!}(1+2) = \frac{3}{(n+1)!},$$

was die Behauptung zeigt. Für unsere Annäherung bemerken wir

$$\frac{3}{13!} \approx 4.8177 \cdot 10^{-10}.$$

Damit ist

$$e \approx s_{12} = \sum_{k=0}^{12} \frac{1}{k!} = 2.718281828$$

unsere Annäherung.