

5.1. MC Fragen: Grenzwert einer Funktion Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 1$. Dann

existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass falls $0 < |x| < \delta$, gilt $|f(x) - 1| > \epsilon$;

Falsch: ein Gegenbeispiel ist gegeben durch die konstante Funktion $f(x) \equiv 2$ und $\epsilon = 3$.

existieren $\epsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, so dass $|f(x_n) - 1| > \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

Richtig: der Satz besagt, dass eine Folge $(x_n)_n$ existiert, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq 1$. Die Definition vom Grenzwert mit Folgen lautet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \iff \text{für jede Folge } (x_n)_n \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1,$$

also ist ihre Negation:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 1 \iff \text{es existiert eine Folge } (x_n)_n \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \text{ s.d. } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq 1.$$

für jede Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq 1$.

Falsch: ein Gegenbeispiel ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

weil für jede Folge rationaler Zahlen $(x_n)_n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$, aber bekanntlich existiert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nicht.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pi$?

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$;

Richtig: Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist an der Stelle 2 beschränkt und stetig, also existiert $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)/x$ genau dann, wenn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existiert, und muss

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{2}$$

sein.

Für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\bar{n} \in \mathbb{N}$, so dass $|f(2 - 1/n) - \pi| < \epsilon$ für jedes $n \geq \bar{n}$;

$$\square \lim_{n \rightarrow \infty} f(2 - 1/n) = \pi.$$

Die zwei letzte Aussagen sind falsch: das zeigt nur, dass für die Folge $x_n = 2 - 1/n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \pi$ gilt; die Definition vom Grenzwert mit Folgen erfordert, dass für jede Folge $(x_n)_n$, die Grenzwert 2 hat, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \pi$ gilt.

5.2. Wichtige Grenzwerte Berechnen Sie mithilfe der Potenzreihendarstellung von \exp , \sin und \cos folgende Grenzwerte:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, & \text{(b)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}, \\ \text{(c)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{(d)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \\ \text{(e)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}. \end{array}$$

Bemerkung: Es gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Lösung: Wir benutzen die Tatsache (siehe 4.8.1 in Struwes Skript), dass eine Potenzreihe $\sum_n c_n z^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ (R darf auch gleich $+\infty$ sein), eine stetige Funktion definiert im Innern des Konvergenzkreises.

(a) Wie in der Vorlesung gesehen, hat $\sin x$ die folgende Potenzreihendarstellung:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Für $x \neq 0$ fixiert sehen wir, dass

$$\frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Durch das Quotientenkriterium sehen wir, dass diese Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$) absolut konvergent ist:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2k+3)(2k+2)} = 0,$$

und ihr Wert in $x = 0$ ist 1. Daraus schliessen wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = 1.$$

(b) Wie in der Vorlesung gesehen, hat $\cos x$ die folgende Potenzreihendarstellung:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Für ein fixiertes $x \neq 0$, sehen wir wie in (a), dass

$$\frac{1}{x} \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}$$

absolut konvergent auf ganz \mathbb{R} (oder \mathbb{C}) ist mit Wert 0, daraus schliessen wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

(c) Genau wie in (b) erhalten wir, dass für ein fixiertes $x \neq 0$, dass

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-2}}{2k!},$$

wobei die Reihe absolut konvergent auf ganz \mathbb{R} (oder \mathbb{C}) ist. Ihr Wert in $x = 0$ ist $1/2$, also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(d) Mit (a) erhalten wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\rightarrow 1} \right) = 1.$$

(e) Wie in (a) erhalten wir, aus der Potenzreihendarstellung

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

für $x \neq 0$, dass

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!},$$

und der Wert dieser absolut konvergenten Reihe an der Stelle 0 ist 1, also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

5.3. (schriftlich) Definition von Stetigkeit Bestimme die Konstanten α und β so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta & \text{falls } x \leq -1, \\ (\alpha + \beta)x & \text{falls } -1 < x < 1, \\ x^2 + \alpha x - \beta & \text{falls } x \geq 1, \end{cases}$$

stetig auf ganz \mathbb{R} wird und skizziere ihren Graph.

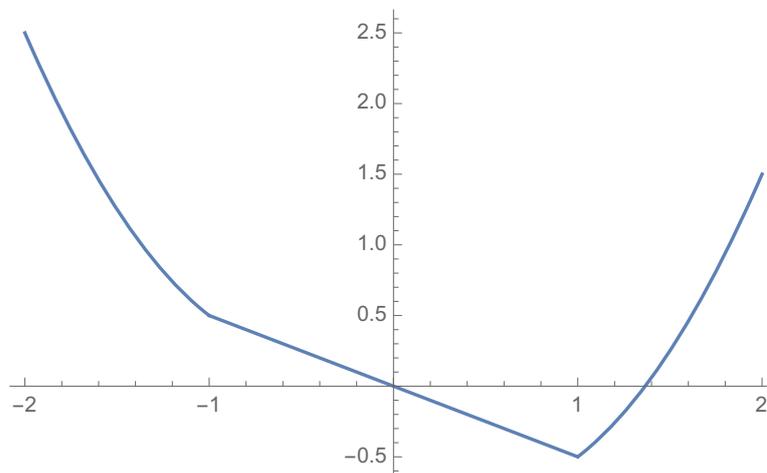
Lösung: Die Funktionen $x \mapsto x^2 - \alpha x + \beta$, $x \mapsto x^2 + \alpha x - \beta$ und $x \mapsto (\alpha + \beta)x$ sind stetig. Darum ist die Funktion f stetig ausserhalb der Punkte ± 1 , und sie besitzt am Punkt $+1$ einen linksseitigen Grenzwert und am Punkt -1 einen rechtsseitigen Grenzwert. Damit sie an diesen Stellen stetig ist, muss noch gelten:

$$1 + \alpha + \beta = f(-1) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (\alpha + \beta)x = -(\alpha + \beta),$$

und

$$1 + \alpha - \beta = f(1) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (\alpha + \beta)x = \alpha + \beta.$$

Die zweite Gleichung ist äquivalent zu $\beta = \frac{1}{2}$, und nach Einsetzen dieses Wertes ist die erste Gleichung äquivalent zu $\alpha = -1$. Wir schliessen, dass f stetig auf ganze \mathbb{R} ist genau dann wenn $\alpha = -1$ und $\beta = 1/2$. Der Graph von f ist dann:



5.4. Zwischenwertsatz

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion bijektiv ist:

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lösung: Zu zeigen: Die Funktion $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ist bijektiv.

Wir wissen: Ein mit stetigen Funktionen gebildeter rationaler Ausdruck ist, soweit definiert, wieder stetig. Darum ist die Funktion $f(x)$ auf $(-1, 1)$ stetig. Als nächstes beachte, dass gilt:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty,$$

denn in beiden Grenzwerten geht der Nenner $\sqrt{1-x^2}$ von oben gegen Null und der Zähler gegen -1 , bzw. gegen 1 . Insbesondere nimmt f für jede gegebene Zahl c sowohl Werte $> c$ als auch Werte $< c$ an. Aus der Stetigkeit und dem Zwischenwertsatz folgt daraus, dass f auch den Wert c selbst annimmt. Somit nimmt f jedes $c \in \mathbb{R}$ als Wert an, das heisst, f ist surjektiv.

Andererseits gilt

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}$$

für $0 < x < 1$. In diesem Bereich ist die Funktion $x \mapsto x^2$ streng monoton wachsend
 \Rightarrow für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ streng monoton fallend
 \Rightarrow für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$ streng monoton fallend
 \Rightarrow für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto f(x)$ streng monoton wachsend.

Ausserdem gilt in diesem Bereich $f(x) > 0 = f(0)$. Somit ist f streng monoton wachsend für $0 \leq x < 1$. Wegen $f(-x) = -f(x)$ folgt, dass f auch auf dem Bereich $-1 < x \leq 0$ streng monoton wachsend ist. Also ist f insgesamt streng monoton wachsend und daher injektiv.

Somit ist f sowohl injektiv als auch surjektiv, also bijektiv.

(b) Es sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $x \in [0, 1]$ derart, dass $f(x) = x$ gilt.

Lösung: Betrachten Sie die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := f(x) - x$. Es gilt

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 0,$$

d.h. ein Punkt x ist genau dann ein Fixpunkt von f , wenn er eine Nullstelle von g ist. Wir müssen daher zeigen, dass g immer eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ besitzt.

Als Differenz von zwei stetigen Funktionen ist g stetig.

Weil ausserdem $f(x) \in [0, 1]$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt, ist

$$g(0) \geq 0 \geq g(1),$$

denn $g(0) = f(0) - 0 \geq 0 - 0 = 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$.

Da g stetig ist, gibt es daher nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [0, 1]$ mit $g(x) = 0$ und somit $f(x) = x$.

(c) Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$. Zeigen sie dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$ existiert, so dass $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

Lösung: Betrachte die stetige Funktion $g : [0, \frac{n-1}{n}] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - f(x + \frac{1}{n})$. Wir müssen zeigen, dass g immer eine Nullstelle im Intervall $[0, \frac{n-1}{n}]$ besitzt. Wir zeigen diese Behauptung indirekt.

Nehmen wir an, dass $g(x) > 0$ für alle $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$. Dann gilt:

$$f(x + \frac{1}{n}) < f(x) \quad \text{für alle } x \in [0, \frac{n-1}{n}].$$

Wählen wir sukzessiv $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ und wenden die letzte Ungleichung an. Damit gilt:

$$0 = f(0) > f(\frac{1}{n}) > f(\frac{2}{n}) > \dots > f(\frac{n-1}{n}) > f(1) = 0,$$

was zu einen Widerspruch führt.

Analog falls $g(x) < 0$ für alle $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$. Dann gilt:

$$f(x) < f(x + \frac{1}{n}) \quad \text{für alle } x \in [0, \frac{n-1}{n}].$$

Wählen wir sukzessiv $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ und wenden wir die letzte Ungleichung an. Damit gilt:

$$0 = f(0) < f(\frac{1}{n}) < f(\frac{2}{n}) < \dots < f(\frac{n-1}{n}) < f(1) = 0,$$

was zu einen Widerspruch führt.

Somit besitzt g eine Nullstelle auf dem Intervall $[0, \frac{n-1}{n}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das impliziert unsere Behauptung.

5.5. Nullstellen Gibt es für die folgende Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stelle $x \in I$ mit $f(x) = 0$. Falls ein solches x existiert, nähern Sie es mit 4 Dezimalzahlen an und erklären Sie die Methode, die Sie benutzt haben für die Annäherung.

Bemerkung: Es wird nicht erwartet, dass Sie *beweisen*, dass Ihre Annäherungen korrekt sind.

(a) $f(x) = 1 + x^2 + \exp(x)$, $I = \mathbb{R}$

Lösung: Wir schätzen ab

$$f(x) = 1 + \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{\exp(x)}_{\geq 0} \geq 1 \quad \forall x \in I.$$

Somit gibt es keine $x \in I$ mit $f(x) = 0$.

(b) $f(x) = x^4 - 3x + 1$, $I = [0, 1]$

Lösung: Wir haben $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0 < 1 = f(0)$. Aus Satz 4.6.1 in Struwes Skript folgt damit, dass es eine Stelle $x \in I$ gibt mit $f(x) = 0$ (offensichtlich ist f stetig). Um eine Annäherung von x zu bestimmen, benutzen wir das Bisektionsverfahren. Für eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, wobei $I = [a, b]$, kann man dies in R wie folgt implementieren

```
f(x) <- function(x){return(x^4-3*x+1)}
```

```
bisection <- function(a,b,E){  
b1 <- b  
a1 <- a  
while (abs(b1-a1)>E){  
c <- (b1-a1)/2  
if (f(a1+c)>0){  
a1 <- a1+c} else {  
b1 <- a1+c}}  
return(a1+(b1-a1)/2)}
```

Da wir $a = 0$ und $b = 1$, haben und $E := \frac{1}{10000}$ ist, schreiben wir

```
bisection(0,1,1/10000)
```

was

```
0.337677
```

ergibt. Dies ist damit unsere Annäherung.

(c) $f(x) = x^3 - 2$, $I = [0, 2]$

Lösung: Diesmal ist $a = 0$ und $b = 2$ mit

$$f(a) = -2 < 0 < 6 = f(2).$$

Damit lautet das Bisektionsverfahren

```
f(x) <- function(x){return(x^3-2)}
```

```
bisection <- function(a,b,E){  
  b1 <- b  
  a1 <- a  
  while (abs(b1-a1)>E){  
    c <- (b1-a1)/2  
    if (f(a1+c)>0){  
      b1 <- a1+c} else {  
      a1 <- a1+c}}  
  return(a1+(b1-a1)/2)}
```

was uns folgende Annäherung gibt

1.259918.

(d) $f(x) = 1 - x \exp(x)$, $I = [0, 1]$

Lösung: Diesmal haben wir

$$f(1) = 1 - \exp(1) < 0 < 1 = f(0).$$

Damit lautet das Bisektionsverfahren

```
f(x) <- function(x){return(1-x*exp(x))}
```

```
bisection <- function(a,b,E){  
  b1 <- b  
  a1 <- a  
  while (abs(b1-a1)>E){  
    c <- (b1-a1)/2  
    if (f(a1+c)>0){  
      a1 <- a1+c} else {  
      b1 <- a1+c}}  
  return(a1+(b1-a1)/2)}
```

was

0.5671692

als unsere Annäherung gibt.