6.1. MC Fragen: Konvergenz gegen $\pm\infty$ Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass

$$f(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{und} \quad g(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty. \tag{1}$$

(a) Ist es möglich, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0?$$

☐ ja

☐ nein

(b) Ist es möglich, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty?$$

☐ ja

☐ nein

(c) Ist es möglich, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty? \tag{2}$$

☐ ja

☐ nein

6.2. Folgen von Funktionen Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert folgender Folgen von Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$. Bestimmen Sie, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(a) $f_n(x) = (1 + x/n)^2$

(b) $f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{falls } 0 \leq x < 1/(2n), \\ 2 - 2nx & \text{falls } 1/(2n) \leq x < 1/n, \\ 0 & \text{falls } 1/n \leq x \leq 1, \end{cases}$

Bemerkung: Eine Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion f auf einem Intervall I, falls für jedes $x \in I$ die (Zahlen-)Folge $f_n(x)$ gegen den Wert $f(x)$ konvergiert, d.h. $|f(x) - f_n(x)| \to 0$ für jedes $x \in I$.
Eine Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmässig gegen eine Grenzfunktion f auf einem Intervall I, falls

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x \in I} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0.$$

6.3. Polynomen Sei $n \in \mathbb{N}$ *ungerade* und

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

für $a_k \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Beweisen Sie, dass es eine Stelle $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $P(x) = 0$ erfüllt ist.

6.4. Additionstheoreme Wir definieren die folgenden drei Potenzreihen.

$$\mathrm{Exp}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \mathrm{Cos}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \mathrm{Sin}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Beweisen Sie $\mathrm{Sin}(x)^2 + \mathrm{Cos}(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und stellen Sie $\mathrm{Cos}(3x)$ als Polynom in $\mathrm{Cos}(x)$ dar.

Bemerkung: In der Vorlesung wurde bewiesen, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Exp}(ix) = \mathrm{Cos}(x) + i\,\mathrm{Sin}(x)$, sowie

$$\mathrm{Cos}(x) = \frac{\mathrm{Exp}(ix) + \mathrm{Exp}(-ix)}{2}, \qquad \mathrm{Sin}(x) = \frac{\mathrm{Exp}(ix) - \mathrm{Exp}(-ix)}{2i}.$$

und

$$\mathrm{Cos}(x+y) = \mathrm{Cos}(x)\,\mathrm{Cos}(y) - \mathrm{Sin}(x)\,\mathrm{Sin}(y),$$
$$\mathrm{Sin}(x+y) = \mathrm{Sin}(x)\,\mathrm{Cos}(y) + \mathrm{Cos}(x)\,\mathrm{Sin}(y).$$

6.5. Wichtige Grenzwerte Berechnen Sie mithilfe der Potenzreihendarstellung von Exp, sin und cos folgende Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

6.6. Eine Funktionenreihe Die Funktion $\langle\cdot\rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert: $\langle x\rangle$ ist der Abstand von x zu der nächsten ganzen Zahl, nämlich, mit der Abrundungsfunktion

$$\langle x\rangle = \begin{cases} x - [x] & \text{falls } x - [x] \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - (x - [x]) & \text{falls } x - [x] > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man definiere die Funktion f durch

$$f(x) = \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} + \frac{\langle 100x\rangle}{100} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Offensichtlich haben wir punktweise Konvergenz

$$f_i \xrightarrow{i\to\infty} f,$$

wobei

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \langle x\rangle \\ f_2(x) &= \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} \\ f_3(x) &= \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} + \frac{\langle 100x\rangle}{100} \\ &\vdots \\ f_i(x) &= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}. \end{aligned}$$

Zeichnen Sie Graph(f_i) für $i = 1, 2, 3$ über das Interval $[0, 1]$. Sieht es so aus als konvergiere die Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f?

(b) Zeigen Sie, dass die gegebene Reihe absolut konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist.

(c) Betrachten Sie jetzt die Folge $f_i(x) = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}$. Konvergiert f_i nach f gleichmässig?

(d) Ist f stetig?