6.1. MC Fragen: Konvergenz gegen $\pm\infty$ Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass

$$f(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{und} \quad g(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty. \tag{1}$$

(a) Ist es möglich, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0?$$

☑ ja

Beispiel: $f(x) = x$ und

$$g(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ gilt dann

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{-x^2} = \frac{-1}{x} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

☐ nein

(b) Ist es möglich, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty?$$

☑ ja

Beispiel: $f(x) = x^2$ und

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt für $x \neq 0$, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{-x} = -x \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

☐ nein

(c) Ist es möglich, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty? \tag{2}$$

☐ ja

☑ nein

Beweis: Wegen (1) gibt es ein $K > 0$, so dass

$$f(x) \geq 1 \quad \text{und} \quad g(x) \leq -1$$

für alle $x \geq K$. Insbesondere gilt für alle $x > K$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0.$$

Somit ist (2) nicht möglich.

6.2. Folgen von Funktionen Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert folgender Folgen von Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$. Bestimmen Sie, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(a) $f_n(x) = (1 + x/n)^2$

Lösung: Wir behaupten, dass $f_n(x)$ gleichmässig (und insbesondere auch punktweise) gegen $f(x) \equiv 1$ auf $[0, 1]$ konvergiert. Tatsächlich gilt für alle $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left|(1 + \frac{x}{n})^2 - 1\right| = \left|1 + 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} - 1\right| \\ &= 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Somit gilt also

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

was die gleichmässige und damit auch die punktweise Konvergenz zeigt.

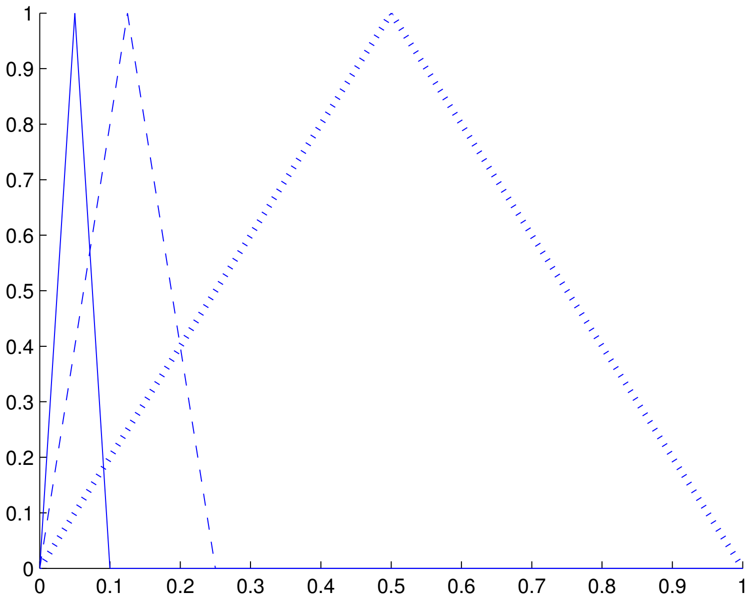
(b) $f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{falls } 0 \leq x < 1/(2n), \\ 2 - 2nx & \text{falls } 1/(2n) \leq x < 1/n, \\ 0 & \text{falls } 1/n \leq x \leq 1, \end{cases}$

Lösung: $f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen $f(x) \equiv 0$. Tatsächlich, sei $x \in [0,1]$. Falls $x = 0$ ist, gilt $f_n(x) = 0$ für jedes x und somit sicher $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Für $x > 0$ wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $x > \frac{1}{n_0}$. Dann gilt insbesondere $x > \frac{1}{n}$ für alle $n \geq n_0$. Also ist $f_n(x) = 0$ für $n \geq n_0$ und damit sicher $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Wir behaupten, dass $f_n(x)$ gleichmässig gegen $f(x) \equiv 0$ nicht konvergiert. Es gilt für jedes n, dass $f_n(\frac{1}{2n}) = 1$ ist und damit ist $f_n(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n}) = 1$.
Damit gilt aber auch

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \left| f_n\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right) \right| = 1 \nrightarrow 0$$

und die Folge konvergiert nicht gleichmässig.



Graphen der Funktionen f_1, f_4 und f_{10}

Bemerkung: Eine Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion f auf einem Intervall I, falls für jedes $x \in I$ die (Zahlen-)Folge $f_n(x)$ gegen den Wert $f(x)$ konvergiert, d.h. $|f(x) - f_n(x)| \to 0$ für jedes $x \in I$.
Eine Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmässig gegen eine Grenzfunktion f auf einem Intervall I, falls

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0.$$

6.3. Polynomen Sei $n \in \mathbb{N}$ *ungerade* und

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

für $a_k \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Beweisen Sie, dass es eine Stelle $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $P(x) = 0$ erfüllt ist.

Lösung: Wir dürfen ohne Bregrenzung der Allgemeinheit annehmen, dass $a_n > 0$ (sohnst wechseln wir in $-P$). Für $x \neq 0$ haben wir dann

$$\frac{P(x)}{x^n} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-n} = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} \quad \text{gilt.}$$

Da $k - n \leq -1$ für $k = 0, \ldots, n-1$ sieht man, dass

$$\frac{P(x)}{x^n} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} a_n > 0 \quad \text{und} \quad \frac{P(x)}{x^n} \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} a_n > 0$$

Insbesondere gibt es sowohl ein $b_r > 0$, so dass $\frac{P(b_r)}{b_r^n} > 0$ als auch ein $b_l < 0$, so dass $\frac{P(b_l)}{b_l^n} > 0$. Da n ungerade ist folgt, dass $P(b_r) > 0$ und $P(b_l) < 0$. Aus Satz 4.6.1 in Struwes Skript folgt nun, dass es ein $c \in (b_l, b_r)$ gibt, so dass $P(c) = 0$.

6.4. Additionstheoreme Wir definieren die folgenden drei Potenzreihen.

$$\operatorname{Exp}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \operatorname{Cos}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \operatorname{Sin}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Beweisen Sie $\operatorname{Sin}(x)^2 + \operatorname{Cos}(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und stellen Sie $\operatorname{Cos}(3x)$ als Polynom in $\operatorname{Cos}(x)$ dar.

Bemerkung: In der Vorlesung wurde bewiesen, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Exp}(ix) = \operatorname{Cos}(x) + i\operatorname{Sin}(x)$, sowie

$$\operatorname{Cos}(x) = \frac{\operatorname{Exp}(ix) + \operatorname{Exp}(-ix)}{2}, \qquad \operatorname{Sin}(x) = \frac{\operatorname{Exp}(ix) - \operatorname{Exp}(-ix)}{2i}.$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos}(x+y) &= \operatorname{Cos}(x)\operatorname{Cos}(y) - \operatorname{Sin}(x)\operatorname{Sin}(y), \\ \operatorname{Sin}(x+y) &= \operatorname{Sin}(x)\operatorname{Cos}(y) + \operatorname{Cos}(x)\operatorname{Sin}(y). \end{aligned}$$

Lösung: Mithilfe die Bemerkung zeigen wir

$$\begin{aligned}1 = \mathrm{Cos}(0) = \mathrm{Cos}(x-x) &= \mathrm{Cos}(x)\,\mathrm{Cos}(-x) - \mathrm{Sin}(x)\,\mathrm{Sin}(-x)\\ &= \mathrm{Cos}(x)^2 + \mathrm{Sin}(x)^2.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Cos}(3x) &= \mathrm{Re}\Big(\mathrm{Exp}(3ix)\Big) = \mathrm{Re}\Big(\mathrm{Exp}(ix)^3\Big) = \mathrm{Re}\Big((\mathrm{Cos}(x) + i\,\mathrm{Sin}(x))^3\Big)\\ &= \mathrm{Re}\Big(\mathrm{Cos}(x)^3 + 3i\,\mathrm{Cos}(x)^2\,\mathrm{Sin}(x) - 3\,\mathrm{Cos}(x)\,\mathrm{Sin}(x)^2 - i\,\mathrm{Sin}(x)^3\Big)\\ &= \mathrm{Cos}(x)^3 - 3\,\mathrm{Cos}(x)\,\mathrm{Sin}(x)^2 = \mathrm{Cos}(x)^3 - 3\,\mathrm{Cos}(x)\Big(1-\mathrm{Cos}(x)^2\Big)\\ &= 4\,\mathrm{Cos}(x)^3 - 3\,\mathrm{Cos}(x),\end{aligned}$$

was die Aufgabe lösst.

6.5. Wichtige Grenzwerte Berechnen Sie mithilfe der Potenzreihendarstellung von Exp, sin und cos folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, **(b)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, **(d)** $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Lösung: Wir benutzen die Tatsache (siehe 4.8.1 in Struwes Skript), dass eine Potenzreihe $\sum_n c_n z^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ (möglich $+\infty$), eine stetige Funktion definiert im Innern des Konvergenzkreises.

(a) Wie in der Vorlesung gesehen, hat $\sin x$ die folgende Potenzreihendarstellung:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Für $x \neq 0$ fixiert sehen wir, dass

$$\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Durch das Quotientenkriterium sehen wir, dass diese Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$) absolut konvergent ist:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{(2k+3)(2k+2)} = 0,$$

und ihr Wert in $x = 0$ ist 1. Daraus schliessen wir, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = 1.$$

(b) Wie in der Vorlesung gesehen, hat $\cos x$ die folgende Potenzreihendarstellung:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Für $x \neq 0$ fixiert, sehen wir, wie in (a), dass

$$\frac{1}{x} \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}$$

absolut konvergent auf ganz $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist mit Wert 0, daraus schliessen wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

(c) Genau wie in (b) erhalten wir, dass für $x \neq 0$ fixiert gilt

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-2}}{2k!},$$

wobei die Reihe absolut konvergent auf ganz $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist. Ihr Wert in $x = 0$ ist $1/2$, also

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(d) Mit (a) erhalten wir, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{x} = \lim_{x\to} \left(\frac{\sin x}{x} \frac{1}{\underbrace{\cos x}_{\to 1}} \right) = 1.$$

(e) Wie in (a), aus der Potenzreihendarstellung

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

für $x \neq 0$ erhalten wir, dass

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!},$$

und der Wert dieser absolut konvergenten Reihe an der Stelle 0 ist 1, also

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

6.6. Eine Funktionenreihe Die Funktion $\langle \cdot \rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert: $\langle x \rangle$ ist der Abstand von x zu der nächsten ganzen Zahl, nämlich, mit der Abrundungsfunktion

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x - [x] & \text{falls } x - [x] \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - (x - [x]) & \text{falls } x - [x] > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man definiere die Funktion f durch

$$f(x) = \langle x \rangle + \frac{\langle 10x \rangle}{10} + \frac{\langle 100x \rangle}{100} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Offensichtlich haben wir punktweise Konvergenz

$$f_i \overset{i \to \infty}{\longrightarrow} f,$$

wobei

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \langle x \rangle \\ f_2(x) &= \langle x \rangle + \frac{\langle 10x \rangle}{10} \\ f_3(x) &= \langle x \rangle + \frac{\langle 10x \rangle}{10} + \frac{\langle 100x \rangle}{100} \\ &\vdots \\ f_i(x) &= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k}. \end{aligned}$$

Zeichnen Sie Graph(f_i) für $i = 1, 2, 3$ über das Interval $[0, 1]$. Sieht es so aus als konvergiere die Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f?

Lösung: Wir machen dies mittels der Software R. Zunächst definieren wir $\langle \cdot \rangle$ (was wir in R h nennen):

```
h <- function(x){
if (x-floor(x)>1/2){
y <- 1-(x-floor(x))} else {
y <- x-floor(x)}
return(y)}
```

Nun können wir unsere 3 Funktionen $f_k,\ k = 1, 2, 3$ definieren:

```
f1 <- function(x){return(h(x))}
f2 <- function(x){return(h(x)+h(10*x)/10)}
f3 <- function(x){return(h(x)+h(10*x)/10+h(100*x)/100)}
```

Um den Graphen zu zeichnen benutzen wir

```
x <- 1:1000
y1 <- 1:1000
y2 <- 1:1000
y3 <- 1:1000
for (i in 1:1000){
x[i] <- i/1000
y1[i] <- f1(x[i])
y2[i] <- f2(x[i])
y3[i] <- f3(x[i])}
plot(x,y1,col="green")
points(x,y2,col="red")
points(x,y3,col="black")
```

Dies ergibt Abbildung 1.

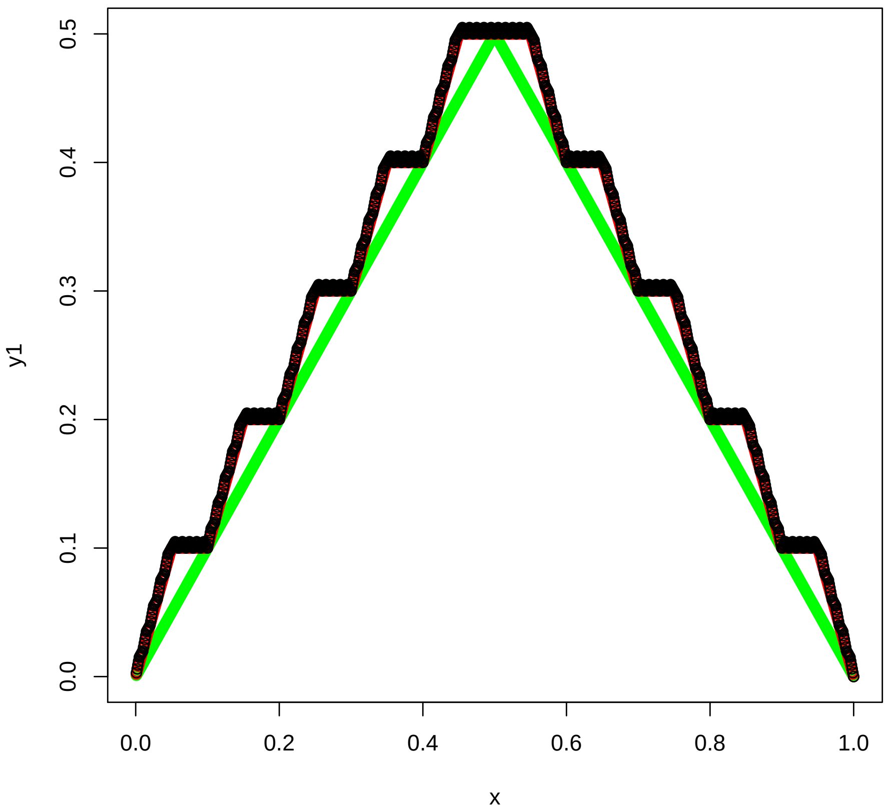


Abbildung 1: Graph(f_1) ist grün, Graph(f_2) ist rot und Graph(f_3) ist schwarz. Man sieht, dass Graph(f_2) und Graph(f_3) schon 'fast gleich' sind. (Siehe online version für Farben)

(b) Zeigen Sie, dass die gegebene Reihe absolut konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist.

Lösung: Es immer gilt für jedes $y \in \mathbb{R}$ $|\langle y \rangle| < 1$, also

$$\frac{|\langle 10^k x \rangle|}{10^k} \leq \frac{1}{10^k} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\langle 10^k x \rangle|}{10^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} < +\infty,$$

damit ist die Reihe absolut konvergent auf $\mathbb{R}$.

(c) Betrachten Sie jetzt die Folge $f_i(x) = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k}$. Konvergiert f_i nach f gleichmässig?

Lösung: Um gleichmässige Konvergenz zu beweisen, beobachten wir, dass *für jedes* $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} |f_i(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} \right| \leq \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{10^k} \to 0 \quad \text{für } i \to \infty. \end{aligned}$$

Somit $\lim_{i\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_i(x) - f(x)|\right) = 0$.

(d) Ist f stetig?

Lösung: Stetigkeit von f folgt sofort aus Satz 4.8.1 in Struwes Skript.