7.1. MC Fragen

(a) *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ genau wenn*

$$\lim_{0 \neq t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

existiert.

Ist diese Definition korrekt?

☐ ja

☐ nein

(b) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir nehmen an, dass $x = \frac{1}{2}$ die einzige Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$ ist. Gilt dann, dass f bei $x = \frac{1}{2}$ ein Minimum/Maximum annimmt?

☐ ja

☐ nein

(c) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und seien $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ paarweise verschiedene Zahlen, so dass $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ gilt. Welche Folgerung ist richtig?

☐ f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a, b]$;

☐ f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a, b]$;

☐ f' hat mindestens zwei Nullstellen auf $[a, b]$;

☐ f' hat mindestens drei Nullstellen auf $[a, b]$.

☐ f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a, b]$;

☐ f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a, b]$.

7.2. Mittelwertsatz I Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]0, \pi[$ mit $f(0) \geq 1$ und $f'(x) \geq -1$ für alle $x \in]0, \pi[$. Folgern Sie $f(x) \geq 1 - x$ für alle $x \in [0, \pi]$ aus dem Mittelwertsatz. Folgt auch, dass f monoton ist? Beweisen oder widerlegen Sie diese Behauptung.

7.3. Mittelwertsatz II Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie folgenden Ungleichungen mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

$$\sqrt{1+x} < 1 + \tfrac{x}{2} \quad \text{für } x > 0, \tag{a}$$

$$e^x(y-x) < e^y - e^x < e^y(y-x) \quad \text{für } x < y, \tag{b}$$

$$1 - \tfrac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1 \quad \text{für } x > 0. \tag{c}$$

Hinweis. Unterscheidung Sie bei **(c)** die drei Fälle $0 < x < 1$, $x = 1$ und $x > 1$.

7.4. Berechnung von Ableitungen Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen mithilfe der Ableitungsregeln:

(a) $x \mapsto \dfrac{3x^7 + x^5 - 2x^4 + x - 3}{x^4}$, **(b)** $x \mapsto \dfrac{x^2(x^2 + 10x + 25)}{(x+5)(x+7)}$,

(c) $x \mapsto \dfrac{x^2 + 2}{\mathrm{e}^{-x}} + \log(1 + \cos^2(x))$,

7.5. Graphen Zur Erinnerung: Um den Graph einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu zeichnen, braucht man für gewöhnlich folgende Informationen:

- der Definitionsbereich D von f, d.h. die Stellen x an denen $f(x)$ definiert ist;
- das Verhalten von f an der Grenze von D, d.h. falls $x_0 \notin D$, die Grenzwerte

  $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) \quad \text{und, falls relevant,} \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x);$$

- das Vorzeichen von f, d.h. die Stellen $x \in D$ wo $f(x)$ positiv, negative oder Null ist;
- die Stellen $x \in D$ wo f wachsend oder fallend ist;
- die Extremstellen und die Extrema von f, d.h. die Stellen $x \in D$ und die dazugehörigen Werte $f(x)$ und wo f lokale/globale Maxima und Minima besitzt;
- falls gefragt, die Stelle $x \in D$ wo f konvex oder konkav ist.

Finden Sie den Definitionsbereich und die lokalen und globalen Extrema der folgenden Funktionen; und zeichnen Sie ihren Graphen.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)}$, **(b)** $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$,

(c) $f(x) = x\sqrt{1-x}$,

7.6. Konvergenzbereich Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Aus der Vorlesung (oder Satz 3.7.4 in Struwes Skript) wissen wir, dass der Konvergenzbereich dieser Reihe gleich $(-1, 1)$ ist. Wir wissen auch, dass die Reihe für gegebenes $r \in (0, 1)$ gleichmässig auf $[-r, r]$ konvergiert. Beweisen Sie, dass die Reihe *nicht* gleichmässig auf dem ganze Interval $(-1, 1)$ konvergiert.