7.1. MC Fragen

(a) *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ genau wenn*

$$\lim_{0 \neq t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

existiert.

Ist diese Definition korrekt?

☑ ja

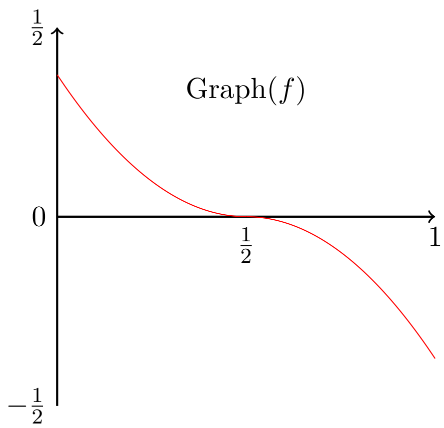
☐ nein

(b) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir nehmen an, dass $x = \frac{1}{2}$ die einzige Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$ ist. Gilt dann, dass f bei $x = \frac{1}{2}$ ein Minimum/Maximum annimmt?

☐ ja

☑ nein

Beispiel: Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ die Funktion, derren Graphen unten gezeichnet ist. Man sieht, dass $f'(1/2) = 0$ ist, aber offensichtlich ist $x = 1/2$ weder eine Maximum- noch eine Minimalstelle.



(c) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und seien $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ paarweise verschiedene Zahlen, so dass $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ gilt. Welche Folgerung ist richtig?

☐ f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a, b]$;

☐ f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a, b]$;

☑ f' hat mindestens zwei Nullstellen auf $[a, b]$;

Lösung: Nach dem Mittelwertsatz (oder dem Satz von Rolle) liegt zwischen je zwei Nullstellen von f mindestens eine Nullstelle von f'. Daher hat f' mindestens zwei Nullstellen. Im Fall $f(x) = 0$ ist auch f' identisch gleich 0. Ein Beispiel wie $f(x) = x^3 - 3x$ mit $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ zeigt, dass die Anzahl der Nullstellen von f' gleich 2 sein kann.

☐ f' hat mindestens drei Nullstellen auf $[a, b]$.

☐ f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a, b]$;

☐ f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a, b]$.

7.2. Mittelwertsatz I Sei $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]0, \pi[$ mit $f(0) \geq 1$ und $f'(x) \geq -1$ für alle $x \in]0, \pi[$. Folgern Sie $f(x) \geq 1 - x$ für alle $x \in [0, \pi]$ aus dem Mittelwertsatz. Folgt auch, dass f monoton ist? Beweisen oder widerlegen Sie diese Behauptung.

Lösung: Sei $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) \geq 1$ und $f'(x) \geq -1$. Zu zeigen ist $f(x) \geq 1 - x$ für alle $x \in [0, \pi]$.

Die Behauptung an der Stelle $x = 0$ folgt aus der Annahme $f(0) \geq 1$. Sei daher $x \in]0, \pi]$ beliebig. Gemäss dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in]0, x[$ mit

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{\geq 1} + \underbrace{f'(\xi)}_{\geq -1}(x - 0) \geq 1 - x.$$

Die Funktion f muss nicht monoton sein: $f(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$ erfüllt die Voraussetzungen $f(0) = 1 \geq 1$ und $f'(x) = -\sin(2x) \geq -1$, ist aber nicht monoton in $[0, \pi]$, da $f(0) = 1 = f(\pi)$ und $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

7.3. Mittelwertsatz II Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie folgenden Ungleichungen mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

$$\sqrt{1 + x} < 1 + \tfrac{x}{2} \qquad \text{für } x > 0, \tag{a}$$

$$e^x(y - x) < e^y - e^x < e^y(y - x) \quad \text{für } x < y, \tag{b}$$

$$1 - \tfrac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1 \qquad \text{für } x > 0. \tag{c}$$

Hinweis. Unterscheidung Sie bei **(c)** die drei Fälle $0 < x < 1$, $x = 1$ und $x > 1$.

Lösung:

(a) Die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ ist differenzierbar für $x > -1$ und für $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} < \frac{1}{2}.$$

Daher folgt $f(x) \leq f(0) + \frac{1}{2}(x-0) = 1 + \frac{x}{2}$ für $x > 0$ aus dem Mittelwertsatz.

(b) Gemäss Mittelwertsatz existiert für jedes Paar $x < y$ ein $\xi \in]x, y[$ mit

$$\frac{e^y - e^x}{y - x} = e^\xi.$$

Da die Exponentialfunktion streng monoton wächst, gilt $e^x < e^\xi < e^y$. Nach Multiplikation mit $(y-x) > 0$ erhalten wir wegen $e^\xi(y-x) = e^y - e^x$ wie behauptet

$$e^x(y-x) < e^y - e^x < e^y(y-x).$$

(c) Es gilt $\log(1) = 0$, das heisst, $1 - \frac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1$ gilt für $x = 1$.

Falls $0 < x < 1$, existiert gemäss dem Mittelwertsatz $\xi \in]x, 1[$ mit $\log(1) = \log(x) + \frac{1}{\xi}(1-x)$. Da $\log(1) = 0$ und $\frac{1}{\xi} > 1$, folgt $\log(x) = -\frac{1}{\xi}(1-x) \leq -(1-x) = x-1$.

Falls $x > 1$, existiert gemäss dem Mittelwertsatz $\xi \in]1, x[$ mit $\log(x) = \log(1) + \frac{1}{\xi}(x-1)$. In diesem Fall ist $\frac{1}{\xi} < 1$, und es folgt ebenfalls $\log(x) \leq x - 1$. Somit gilt $\log(x) \leq x - 1$ für alle $x > 0$. Daraus folgt wiederum

$$-\log(x) = \log(\tfrac{1}{x}) \leq \tfrac{1}{x} - 1,$$

also $\log(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$ und es folgt die Behauptung

$$1 - \tfrac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1 \qquad \forall x > 0.$$

7.4. Berechnung von Ableitungen Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen mithilfe der Ableitungsregeln:

(a) $x \mapsto \dfrac{3x^7 + x^5 - 2x^4 + x - 3}{x^4}$, **(b)** $x \mapsto \dfrac{x^2(x^2 + 10x + 25)}{(x+5)(x+7)}$,

(c) $x \mapsto \dfrac{x^2 + 2}{\mathrm{e}^{-x}} + \log(1 + \cos^2(x))$,

Lösung: Wir nennen die jeweilige Funktion jedes Mal f.

(a) Wir teilen den Bruch auf:

$$f(x) = \frac{3x^7 + x^5 - 2x^4 + x - 3}{x^4} = 3x^3 + x - 2 + x^{-3} - 3x^{-4};$$

die Ableitung von Potenzfunktionen liefert:

$$f'(x) = 9x^2 + 1 - 3x^{-4} + 12x^{-5} = \frac{9x^7 + x^5 - 3x + 12}{x^5}.$$

(b) Wir sehen, dass

$$f(x) = \frac{x^2(x^2 + 10x + 25)}{(x+5)(x+7)} = \frac{x^2(x+5)^2}{(x+5)(x+7)} = \frac{x^2(x+5)}{x+7};$$

die Quotierenregel liefert:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 10x)(x+7) - x^3 - 5x^2}{(x+7)^2} = \frac{2x^3 + 26x^2 + 70x}{(x+7)^2}.$$

(c) Die Ableitungsregeln (Quotientenregel, Ableitung von $\mathrm{Exp}, \log, \sin$) liefern:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x(x(x+2) + 2) - \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x) + 1}.$$

7.5. Graphen Zur Erinnerung: Um den Graph einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu zeichnen, braucht man für gewöhnlich folgende Informationen:

- der Definitionsbereich D von f, d.h. die Stellen x an denen $f(x)$ definiert ist;
- das Verhalten von f an der Grenze von D, d.h. falls $x_0 \notin D$, die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) \quad \text{und, falls relevant,} \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x);$$

- das Vorzeichen von f, d.h. die Stellen $x \in D$ wo $f(x)$ positiv, negative oder Null ist;
- die Stellen $x \in D$ wo f wachsend oder fallend ist;
- die Extremstellen und die Extrema von f, d.h. die Stellen $x \in D$ und die dazugehörigen Werte $f(x)$ und wo f lokale/globale Maxima und Minima besitzt;
- falls gefragt, die Stelle $x \in D$ wo f konvex oder konkav ist.

Finden Sie den Definitionsbereich und die lokalen und globalen Extrema der folgenden Funktionen; und zeichnen Sie ihren Graphen.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)}$, **(b)** $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$,

(c) $f(x) = x\sqrt{1-x}$,

Lösung:

(a) Der Definitionsbereich ist $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Die wichtigen Grenzwerte sind

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty.$$

Das Vorzeichen von f ist wie folgt:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2},$$

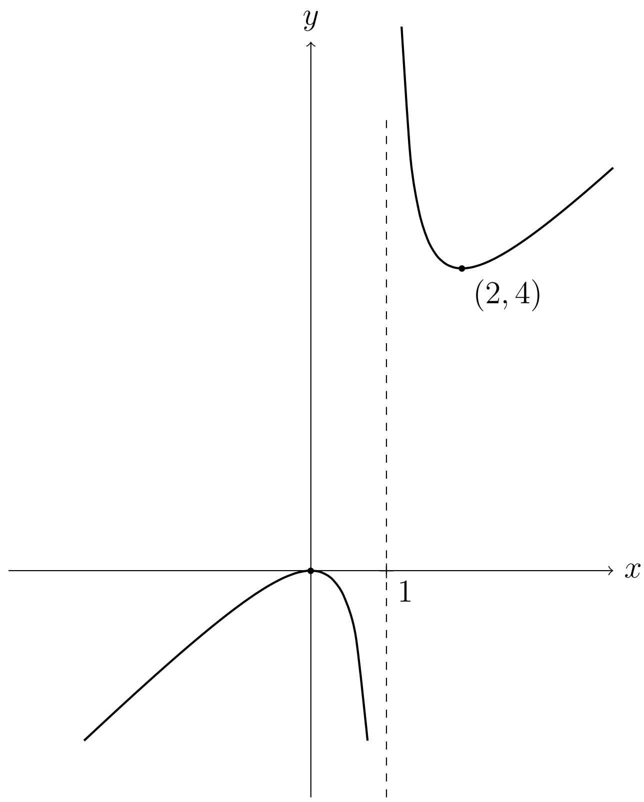
somit

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0,\ x \geq 2,$$

und die kritischen Punkte sind 0 und 2. Wir sehen, dass die zweite Ableitung von f

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

ist. Somit, weil $f''(0) = -2 < 0$, muss $x = 0$ eine lokale Maximalstelle sein mit Wert 0, und weil $f''(2) = 2 > 0$, muss $x = 2$ eine lokale Minimalstelle sein mit Wert 4. *Zusammenfassend:* f ist von oben und unten unbeschränkt; 0 ist ein Maximalstelle mit Wert 0 und 2 ist eine lokale Minimalstelle mit Wert 4. Der Graph ist wie folgt:



(b) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$. f ist periodisch mit Periode 2π, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(x + 2\pi)$, somit ist es genug nur $x \in [0, 2\pi]$ zu betrachten. Vorzeichen:

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \geq -\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \tan x \geq -\sqrt{3} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]. \end{aligned}$$

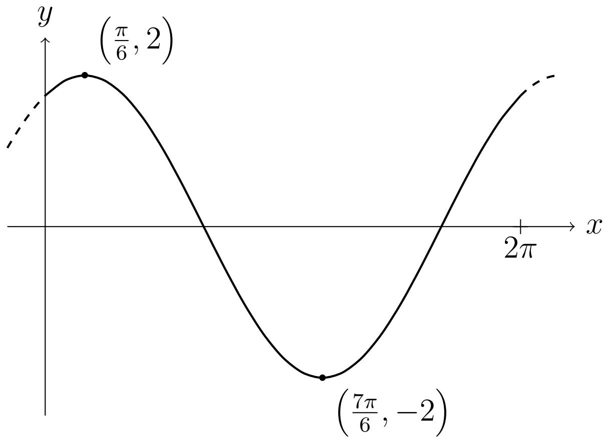
Die Ableitung ist $f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$, somit

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \tan x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, 2\pi\right].$$

Wir folgern, dass f in $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, 2\pi\right]$ wachsend ist, und dass die kritischen Punkte $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{7\pi}{6}$ sind. Die zweite Ableitung ist $f''(x) = -\sin x - \sqrt{3}\cos x$, damit sehen wir, dass

$$\begin{aligned} f''(\pi/6) = -2 < 0 &\Rightarrow \pi/6 \text{ lokale Maximalstelle, mit Wert } 2, \\ f''(7\pi/6) = 2 > 0 &\Rightarrow 7\pi/6 \text{ lokale Minimalstelle, mit Wert } -2. \end{aligned}$$

Zusammenfassend: f hat globale Maximalstellen bei $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ mit Wert 2 und globale Minimalstellen bei $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ mit wert -2. Der Graph ist wie folgt:



(c) Der Definitionsbereich ist $D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$. Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Vorzeichen:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Ableitung:

$$f'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}},$$

somit

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3},$$

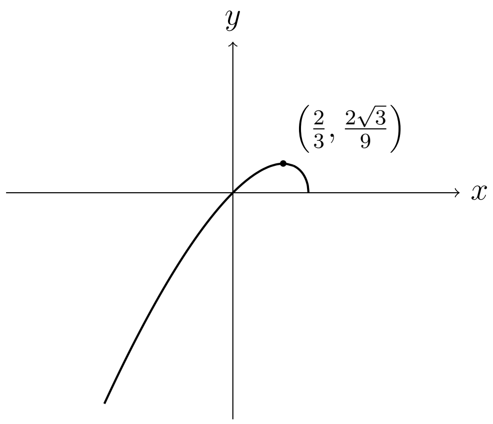
daraus folgern wir, dass f in $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ wachsend ist, und der einige kritische Punkt $x = \frac{2}{3}$ ist. Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = \frac{3x-4}{4(1-x)^{3/2}},$$

somit

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} \text{ lokale Maximalstelle, mit Wert } \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Zusammenfassend: f is von unten unbeschränkt, und hat bei $\frac{2}{3}$ eine global Maximalstelle mit Wert $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Der Graph ist wie folgt:



7.6. Konvergenzbereich Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Aus der Vorlesung (oder Satz 3.7.4 in Struwes Skript) wissen wir, dass der Konvergenzbereich dieser Reihe gleich $(-1, 1)$ ist. Wir wissen auch, dass die Reihe für gegebenes $r \in (0, 1)$ gleichmässig auf $[-r, r]$ konvergiert. Beweisen Sie, dass die Reihe *nicht* gleichmässig auf dem ganze Interval $(-1, 1)$ konvergiert.

Lösung: Eine Folge von Funktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ konvergiert *gleichmässig* gegen $s : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ genau wenn

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ so dass } \sup_{x\in(-1,1)} |s(x) - s_n(x)| < \epsilon \quad \forall\, n \geq N.$$

In unserem Fall sind $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ und $s(x) = \frac{1}{1-x}$. Damit haben wir

$$|s_n(x) - s(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{|1 - x|}$$

und wir sehen sofort, dass

$$\frac{|x|^{n+1}}{|1 - x|} \xrightarrow{x\to 1} \infty.$$

Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, haben wir

$$\sup_{x\in(-1,1)} |s(x) - s_n(x)| = \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

und wir sehen, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht* gleichmässig auf $(-1, 1)$ gegen s konvergieren.