9.1. MC Fragen

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion mit $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- ☐ $\frac{d^i}{dt^i}|_{x=0} f(x) = f^{(i)}(0) = 0$ für i ungerade.
- ☐ $\frac{d^i}{dt^i}|_{x=0} f(x) = f^{(i)}(0) = 0$ für i gerade.
- ☐ $\frac{d^i}{dt^i}|_{x=0} f(x) = f^{(i)}(0) \neq 0$ für i ungerade.
- ☐ $\frac{d^i}{dt^i}|_{x=0} f(x) = f^{(i)}(0) \neq 0$ für i gerade.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion, die durch

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

definiert ist. Dann ist $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ein kritischer Punkt von f.

- ☐ $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ist eine Minimumalstelle von f.
- ☐ $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ist eine Maximalstelle von f.
- ☐ $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ist ein Sattelpunkt von f.

9.2. Eine Annäherung Sei $f : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arctan(x)$ die Funktion, so dass

$$\tan(f(x)) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$|f^{(3)}(x)| \leq 2 \quad \forall\, |x| \leq 10.$$

(c) Bestimmen Sie eine Annäherung $c \in \mathbb{R}$ zu $f(\frac{1}{2})$, so dass $|c - f(\frac{1}{2})| < \frac{1}{10}$.

Hinweise: Benutzen Sie eine Taylorannäherung.

9.3. Newton-Verfahren Nähern Sie für folgende Funktionen mit dem Newton Verfahren ein $x \in I$ an, das $f(x) = 0$ erfüllt.

(a) $f(x) = x^5 - 2, \quad I = [0, 2]$

(b) $f(x) = \arctan(x) - 1, \quad I = [0, 2]$

(c) $f(x) = xe^x - 1, \quad I = [0, 1]$

Schreiben Sie im jeden Fall die Iterationsregel des Newton-Verfahrens auf und bestimmen Sie eine Annäherung $x \in I$, so dass $|f(x)| \leq 10^{-10}$. Wie viele Iterationen brauchen Sie dafür?

9.4. Eine glatte Funktion Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(]0, \infty[)$ ist und, dass $f^{(m)}(x) = P_m(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ gilt für $x > 0$. Dabei sind die P_m ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) Polynome.

(b) Bestimmen Sie $P_1, \ldots, P_4$.

(c) Zeigen Sie

$$\lim_{x \downarrow 0} f^{(m)}(x) = 0$$

für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(d) Folgern Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist mit $f^{(m)}(0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.