9.1. MC Fragen

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion mit $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

☑ $\frac{d^i}{dt^i}|_{x=0} f(x) = f^{(i)}(0) = 0$ für i ungerade.

☐ $\frac{d^i}{dt^i}|_{x=0} f(x) = f^{(i)}(0) = 0$ für i gerade.

☐ $\frac{d^i}{dt^i}|_{x=0} f(x) = f^{(i)}(0) \neq 0$ für i ungerade.

☐ $\frac{d^i}{dt^i}|_{x=0} f(x) = f^{(i)}(0) \neq 0$ für i gerade.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion, die durch

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

definiert ist. Dann ist $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ein kritischer Punkt von f.

☐ $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ist eine Minimumalstelle von f.

☐ $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ist eine Maximalstelle von f.

☑ $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ist ein Sattelpunkt von f.

9.2. Eine Annäherung

Sei $f : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arctan(x)$ die Funktion, so dass

$$\tan(f(x)) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Lösung: Wir wissen aus der Vorlesung, dass $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni y \mapsto \tan(y)$ in der Klasse C^∞ ist (sie ist eine konvergente Potenzreihe). Aus Satz 5.2.2 in Struwes Skript wissen wir, dass

$$f'(x) = \frac{1}{\tan'(f(x))} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt, dass f' in der Klasse C^0 liegt. Also liegt f in der Klasse C^1. Um zu zeigen, dass f in der Klasse C^k liegt für jedes $k \in \mathbb{N}$, machen wir einen Induktionsbeweis. Wir haben schon die Verankerung gezeigt. Unsere Induktionsannahme ist, dass f in der Klasse C^{k-1} liegt und wir müssen zeigen, dass dies impliziert, dass f in der Klasse C^k liegt. Also, dass $f^{(k-1)}$ in der Klasse C^1 liegt. Wir haben

$$f^{(k-1)}(x) = \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} f'(x) = \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} \left(\frac{1}{\tan'(f(x))} \right).$$

Aus der Produkt-, Quotient-, und Kettenregel folgt, dass dies nur Glieder von Produkten, Quotienten und Kompositionen von

$$\frac{d^l}{dx^l}f(x),\ l=0,\dots k-1 \qquad \frac{d^m}{dx^m}\tan(x),\ m=1,\dots,k$$

enthält. Aus unserer Annahme (f liegt in der Klasse C^{k-1}) folgt, dass $f^{(k-1)}$ eine stetig differentierbare Funktion ist. Somit ist $f^{(k-1)}$ in der Klasse C^1, da f ist in der Klasse C^k ist. Nun folgt, dass f in der Klasse C^∞ liegt.

(b) Zeigen Sie, dass

$$|f^{(3)}(x)| \le 2 \quad \forall\ |x| \le 10.$$

Lösung: Wir haben

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}f'(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Dies ergibt

$$f^{(3)}(-10) = f^{(3)}(10) = \frac{600-2}{(1+100)^3} = \frac{598}{101^3} \in (0,1).$$

Nun berechnen wir, dass

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\right) = \frac{-24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x \in \{-1,0,1\}$$

und

$$f^{(3)}(-1) = f^{(3)}(1) = \frac{6-2}{(1+1)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
$$f^{(3)}(0) = -2.$$

Da das Maximum von $|f^{(3)}||_{[-10,10]}$ entweder ein kritischer Punkt von $f^{(3)}$ in $(-10,10)$ ist oder gleich $f(-10), f(-10)$ ist, haben wir die Behauptung gezeigt.

(c) Bestimmen Sie eine Annäherung $c \in \mathbb{R}$ zu $f(\frac{1}{2})$, so dass $|c - f(\frac{1}{2})| < \frac{1}{10}$.

Hinweise: Benutzen Sie eine Taylorannäherung.

Lösung: Aus der Vorlesung (siehe auch Satz 5.5.1 in Struwes Skript) folgt, dass es ein $\xi \in]0, \frac{1}{2}[$ gibt, so dass

$$|P_2(\tfrac{1}{2}) - f(\tfrac{1}{2})| \le \left| f^{(3)}(\xi)\frac{(\frac{1}{2})^3}{3!}\right| \le \frac{2}{2^3\cdot 3!} = \frac{1}{24} < \frac{1}{10},$$

wobei

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} = x$$

das Taylorpolynom zweiter Ordnung ist.[1] Unsere Annäherung ist somit

$$f(\tfrac{1}{2}) \approx P_2(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

9.3. Newton-Verfahren Nähern Sie für folgende Funktionen mit dem Newton Verfahren ein $x \in I$ an, das $f(x) = 0$ erfüllt.

(a) $f(x) = x^5 - 2, \quad I = [0, 2]$

(b) $f(x) = \arctan(x) - 1, \quad I = [0, 2]$

(c) $f(x) = xe^x - 1, \quad I = [0, 1]$

Schreiben Sie im jeden Fall die Iterationsregel des Newton-Verfahrens auf und bestimmen Sie eine Annäherung $y \in I$, so dass $|f(y)| \leq 10^{-10}$. Wie viele Iterationen brauchen Sie dafür?

Lösung: Errinern Sie sich, dass das Newton-Verfahren durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

definiert ist. In R können wir das Newton Verfahren wie folgend programmieren (hier schreiben wir h für f').

```
options(digits=20)
newton <-function(f,h,x) {
+ k <- 0
+ while (abs(f(x))>1/10^10) {
+ k <- k+1
+ x <- x-f(x)/h(x)}
+ y <- 1:2
+ y[1] <- k
+ y[2] <- x
+ return(y)}
```

[1] Bemerken Sie, dass das Taylorpolynom *zweiter Ordnung* in diesem Fall ein Polynom *erster Ordnung* ist!

(a) In diesem Fall haben wir $h(x) = f'(x) = 5x^4$ und somit lautet das Newton Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - 2}{5x_n^4}.$$

Wenn wir $x_0 = \frac{1}{2}$ als Anfangspunkt benutzen ergibt

```
h <- function(x){return(5*x^4)}
f <- function(x){return(x^5-2)}
x <- 1/2
newton(f,h,x)
```

den Vektor

```
(13 1.1486983549984590702).
```

Somit braucht man 13 Iterationen und unsere Annäherung ist

$$x \approx 1.1486983549984590702 \in I.$$

(b) Für $f(x) = \arctan(x) - 1$ haben wir

$$h(x) = f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Damit ist das Newton-Iteration

$$x_{n+1} = x_n - (\arctan(x_n) - 1)(1 + x_n^2).$$

In R schreiben wir

```
f <- function(x){return(atan(x)-1)}
h <- function(x){return(1/(1+x^2))}
x <- 1
newton(f,h,x)
```

was

```
(4 1.5574077243817869842)
```

ergibt. Somit braucht man 4 Iterationen und unsere Annäherung ist

$$x \approx 1.5574077243817869842.$$

(c) Für $f(x) = xe^x - 1$ haben wir

$$h(x) = f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x).$$

Damit ist die Newton-Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n e^{x_n} - 1}{e^{x_n}(1+x_n)}.$$

In R schreiben wir

```
f <- function(x){return(x*exp(x)-1)}
h <- function(x){return(exp(x)*(1+x))}
x <- 1/2
newton(f,h,x)
```

was

```
(4 0.56714329040978395113)
```

ergibt. Somit braucht es 4 Iterationen und unsere Annäherung ist

$$x \approx 0.56714329040978395113.$$

9.4. Eine glatte Funktion Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(]0, \infty[)$ ist und, dass $f^{(m)}(x) = P_m(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ gilt für $x > 0$. Dabei sind die P_m ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) Polynome.

Lösung: Wir machen einen Induktionsbeweis. Für $m = 0$ gilt die Aussage offensichtlich mit $P_0 \equiv 1$. Dies zeigt die Verankerung. Induktionsannahme: $f^{(m)}(x) = P_m(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ für alle $x > 0$, wobei P_m ein Polynom ist. Dann ist auch P'_m ein Polynom und

$$\frac{d}{dx}f^{(m)}(x) = \frac{d}{dx}\left(P_m(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = \left(-P'_m(\tfrac{1}{x})\tfrac{1}{x^2} + 2P_m(\tfrac{1}{x})\tfrac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Wenn $z = \frac{1}{x}$ sehen wir, dass

$$-P'_m(\tfrac{1}{x})\tfrac{1}{x^2} + 2P_m(\tfrac{1}{x})\tfrac{1}{x^3} = -P'_m(z)z^2 + 2P_m(z)z^3$$

ist, was wiederum ein Polynom in z ist. Somit haben wir den Induktionsschritt gezeigt.

(b) Bestimmen Sie $P_1, \ldots, P_4$.

Lösung: Für $x > 0$ haben wir

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \\
f^{(2)}(x) &= \frac{4 - 6x^2}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{4(6x^4 - 9x^2 + 2)}{x^9} e^{-\frac{1}{x^2}} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{4(30x^6 - 75x^4 + 36x^2 - 4)}{x^{12}} e^{-\frac{1}{x^2}}
\end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}
P_1(z) &= 2z^3 \\
P_2(z) &= 4z^6 - 6z^4 \\
P_3(z) &= 4(6z^5 - 9z^7 + 2z^9) \\
P_4(z) &= -4(30z^6 - 75z^8 + 36z^{10} - 4z^{12}).
\end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie

$$\lim_{x \downarrow 0} f^{(m)}(x) = 0$$

für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lösung: Da P_m ein Polynom ist, gilt $|P_m(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$ und damit gilt

$$P_m(\tfrac{1}{x}) \xrightarrow{x \downarrow 0} \infty$$

wenn P_m nicht konstant ist. Offensichtlich gilt auch

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \downarrow 0} 0.$$

Da aber die Exponentialfunktion viel schneller wächst als jedes Polynom, haben wir

$$f^{(m)}(x) = P_m(x) e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \downarrow 0} 0$$

für jedes $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, was die Teilaufgabe löst.

(d) Folgern Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist mit $f^{(m)}(0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lösung: f ist stetig differenzierbar sowohl auf dem Intervall $[0, \infty[$, als auch auf dem Intervall $]-\infty, 0]$. Wegen **(c)** haben wir

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \uparrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t}.$$

Somit ist $f \in C^1(\mathbb{R})$. f' ist stetig differenzierbar sowohl auf dem Intervall $[0, \infty[$, als auch auf dem Intervall $]-\infty, 0]$. Wegen **(c)** haben wir

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \lim_{t \uparrow 0} \frac{f'(t) - f'(0)}{t}.$$

Somit ist $f' \in C^1(\mathbb{R})$. Also, $f \in C^2(\mathbb{R})$. Ein Induktionsargument zeigt nun, dass $f \in C^m(\mathbb{R})$ für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wegen **(c)** gilt offensichtlich $f^{(m)}(0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.