# Analysis II: Vorgelöste Aufgaben Satz von Fubini, Integration im $\mathbb{R}^n$

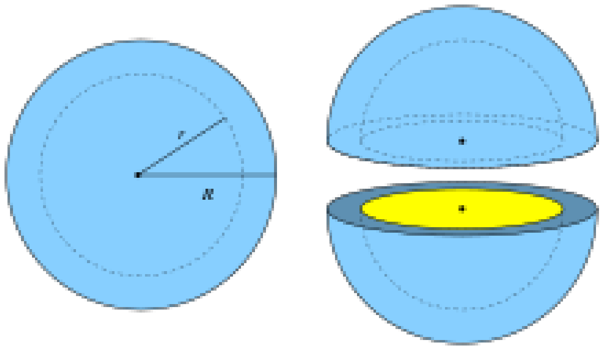
---

**Aufgabe 1 (Schwerpunktberechnung)** Sei

$$A = \{(x, y, z) \mid r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine halbe Hohlkugel mit innerem Radius $r > 0$ und äusserem Radius $R > r$. Berechne den Schwerpunkt von $A$. (Zur Definition des Schwerpunktes s. Aufgabe 1 in Serie 11.)

Lösung: Wieder empfiehlt es sich, ein Bild der Menge zu zeichnen, oder ggf. sich die Menge vorzustellen.




Links: Draufsicht. Rechts: 3D-Ansicht, gefragt ist der Schwerpunkt (nur) der oberen Halbschale.

Wir wollen die Integrale

$$s_f = \int_A f d(x, y, z)$$

mit dem Satz von Fubini berechnen, wobei für $f$ entweder $x$, $y$ oder $z$ einzusetzen ist. Der Schwerpunktes ist dann $(S_x, S_y, S_z) = \frac{1}{V}(s_x, s_y, s_z)$, wobei $V = s_1$ das Volumen von $A$ ist. Was man einfach sieht, ist das für $f = x, y$ der Integrand ungerade ist unter der Symmetrie $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$ von $A$. Deshalb muss gelten $s_x = s_y = 0$, und wir müssen nur noch $s_z$ ausrechnen. Wir wollen dazu drei Lösungswege beschreiben:

**Weg 1. Stumpfsinnige Anwendung von Fubini:** Man muss zuerst entscheiden in welcher Reihenfolge man integriert, d.h., wie der Satz von Fubini anzuwenden ist, um möglichst wenig Rechenaufwand zu haben. (Dabei hilft Erfahrung und Übung; generell will man möglichst symmetrische Schnitte haben.) Hier integriert man mit Vorteil zunächst über $x, y$, und dann über $z$. Wir müssen die Fälle $z \in [0, r)$ und $z \in [r, R]$ unterscheiden: Im ersten Fall ist $A_z$ ein Kreisring mit innerem Radius $\sqrt{r^2 - z^2}$ und äusserem Radius $\sqrt{R^2 - z^2}$, im zweiten Fall eine Scheibe mit Radius $\sqrt{R^2 - z^2}$. Also

$$\begin{aligned}
s_z &= \int_0^R \left(\int_{A_z} z d(x, y)\right) dz = \int_0^R z\left(\int_{A_z} 1 d(x, y)\right) dz \\
&= \int_0^R z v_2(A_z) dz \\
&= \int_0^r z\pi(R^2 - z^2 - (r^2 - z^2)) dz + \int_r^R z\pi(R^2 - z^2) dz \\
&= \pi \int_0^r z(R^2 - r^2) dz + \pi \int_r^R z(R^2 - z^2) dz \\
&= \pi \frac{r^2}{2}(R^2 - r^2) + \pi\left(R^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right) \Big|_r^R \\
&= \frac{\pi}{2} r^2 (R^2 - r^2) + \pi\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} - \left(\frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4).
\end{aligned}$$

Wir finden also $(s_x, s_y, s_z) = (0, 0, \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4))$.

Für den Schwerpunkt muss man noch durch das Volumen des Körpers dividieren. Das Volumen der Vollkugel vom Radius $R$ ist $\frac{4}{3}\pi R^3$, wie in der Vorlesung gesehen. Das Volumen der (vollen) Kugelschale ist also $\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$. Das Volumen der halben Kugelschale ist folglich $\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$. Wir erhalten also für den Schwerpunkt

$$\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)} \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{8}\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} \end{pmatrix}$$

**Weg 2:** Sei

$$H_\rho = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

die halbe Vollkugel vom Radius $\rho$. Dann ist

$$s_z = \int_A z dx = \int_{H_R} z d(x, y, z) - \int_{H_r} z d(x, y, z).$$

Wir berechnen zunächst also mit Fubini

$$\begin{aligned} t_\rho := \int_{H_\rho} z d(x, y, z) &= \int_0^\rho z(\pi(\rho^2 - z^2)) dz \\ &= \pi(\rho^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}) \mid_0^\rho \\ &= \pi\rho^4(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{4}\rho^4. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir wieder

$$s_z = t_R - t_r = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4).$$

**Weg 3. Kugelkoordinaten:** Wir benutzen Kugelkoordinaten $(\rho, \theta, \phi)$, d.h.,

$$(x, y, z) = \rho(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta).$$

In Kugelkoordinaten wird unsere Menge $A$ einfach zu

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid r \leq \rho \leq R, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \phi \in [0, 2\pi)\}.$$

Unser Integral wird also zu (s. Vorlesung nächste Woche)

$$\begin{aligned} s_z = \int_A z d(x, y, z) &= \int_B \rho\cos\theta\rho^2\sin\theta d(\rho, \theta, \phi) \\ &= \int_r^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \rho^3 \cos\theta\sin\theta d\phi d\theta d\rho \\ &= 2\pi \left(\int_r^R \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta\right) \\ &= 2\pi\frac{R^4 - r^4}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4). \end{aligned}$$

Hier haben wir das Resultat aus der Analysis I benutzt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2\theta) d\theta = -\frac{1}{4}\cos(2\theta) \mid_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

**Bemerkung 1:** In der vorhergehenden Version hatte es einen Fehler: Es ging vergessen, am Ende durch das Volumen zu dividieren.

**Bemerkung 2:** Eine Teilaufgabe der Serie ist hier schon vorgelöst, als Ausgleich für die gleiche Serienlänge trotz 50% weniger Vorlesung in dieser Woche. Einen guten Auffahrts-Ferientag!