Analysis I: Vorgelöste Aufgaben zu Extremwertproblemen und Konvexität

---

Aufgabe 1

a) Untersuchen Sie die folgende Funktion auf dem $\mathbb{R}^2$ auf lokale Extrema:

$$f(x,y) = (y^3 - 3y)e^{-x^2}$$

Wir berechnen die ersten und zweiten partiellen Ableitungen (Gradient und Hessesche Matrix)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -(y^3 - 3y)2xe^{-x^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3(y^2 - 1)e^{-x^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (y^3 - 3y)(-2 + 4x^2)e^{-x^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -2x(3y^2 - 3)e^{-x^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6ye^{-x^2}
\end{aligned}$$

Die kritischen Punkte sind die, an denen die 1. partiellen Ableitungen verschwinden, also gegeben durch

$$\begin{aligned}
-(y^3 - 3y)2xe^{-x^2} &= 0 \\
3(y^2 - 1)e^{-x^2} &= 0
\end{aligned}$$

Da $e^{-x^2} \neq 0$ folgt aus der 2. Gleichung, dass $y = \pm 1$ gelten muss. Die erste Gleichung besagt dann, dass $x = 0$ sein muss. Die kritischen Punkte sind also $(0,1)$ und $(0,-1)$. Die Hessesche ist an diesen Punkten (...werte einfach die 2. Ableitungen oben in den Punkten aus)

$$\begin{aligned}
H_f(0,1) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\
H_f(0,-1) &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die 1. Matrix is offensichtlich positiv definit und die zweite negativ definit, wir haben also ein isoliertes lokales Minimum in $(0,1)$ und ein isoliertes lokales Maximum in $(0,-1)$.

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = x + y - e^x - e^{x+y}$ auf Konvexität.

Wir berechnen wieder die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -e^x - e^{x+y} & -e^{x+y} \\ -e^{x+y} & -e^{x+y} \end{pmatrix}.$$

Wir wollen untersuchen, ob bzw. wo H_f positiv oder negativ (semi-)definit ist.

Zur Prüfung der Definitheit kann man unter anderem eine der beiden Strategien verwenden.

(a) Man berechnet die Eigenwerte. Sind diese beide > 0 (≥ 0, < 0, ≤ 0), so ist die Matrix pos. definit (pos. semidefinit, neg. def., neg. semidef.).

(b) Man benutzt das einfachere Kriterium, dass eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ genau dann positiv definit ist wenn gilt $\det A_k > 0$ für $k = 1, \dots, n$, wobei $A_k := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ die $k \times k$ Matrix in der oberen linken Ecke von A ist. Achtung: Dieses Kriterium ist verwendbar für Definitheit, nicht für Semidefinitheit.

In unserem Fall ($A = H_f$) ist $\det A_1 = A_1 = -e^x - e^{x+y}$ überall < 0. Ferner ist

$$\det H_f = (-e^x - e^{x+y})(-e^{x+y}) - (e^{x+y})^2 = e^{2x+y}$$

überall > 0. Es gilt also für $B = -H_f$, dass $\det B_1 = B_1 > 0$ und $\det B > 0$, also ist B positiv definit. Also ist $H_f = -B$ überall negativ definit. Also ist f eine konkave Funktion.