Prof. Dr. T. Willwacher FS 2018

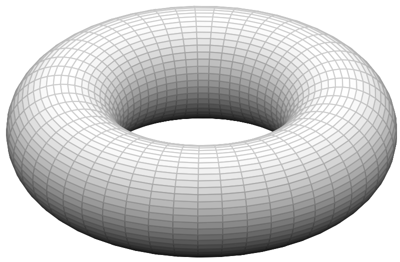
Analysis II: Vorgelöste Aufgaben: Satz vom regulären Wert

Aufgabe 1 Sei $r \in (0,1)$. Zeige, dass der Torus

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2 + z^2 = r^2\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimme auch den Tangentialraum im Punkt $a = (1+\frac{r}{\sqrt{2}}, 0, \frac{r}{\sqrt{2}})$. Was passiert für $r = 1$?

Lösung: Es hilft, sich wenn möglich eine Zeichnung anzufertigen.



Der Radius der "Röhre" ist hier r, der Abstand des Mittelpunktes dieser Röhre vom Ursprung des Koordinatensystems ist 1.

Wir wollen den Satz vom regulären Wert anwenden. Die Menge M ist die Niveaumenge der Funktion

$$f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2 + z^2$$

zum Wert $r^2 < 1$. Hier ist zunächst zu beachten, dass f nur auf $U = (\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)) \times \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, da die Funktion $(x,y) \to \sqrt{x^2+y^2}$ nicht differenzierbar ist im Ursprung. Es ist klar, dass $M \subset U$ eine Untermenge von U ist, da für $(x,y) = 0$ (und $r < 1$) die Gleichung

$$r^2 = f(x,y,z) = (0-1)^2 + z^2 = 1 + z^2 (\geq 11)$$

keine Lösung hat. Wir können also die stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ betrachten, mit $M = f^{-1}(r^2)$.

Als zweites wollen wir zeigen, dass r^2 ein regulärer Wert von f ist. Wir berechnen dazu (auf U) die Ableitung

$$f'(x,y,z) = \left(2\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 2\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 2z\right).$$

Wir müssen zeigen, dass für alle $(x,y,z) \in M$ die 1×3-Matrix $f'(x,y,z)$ eine surjektive Abbildung beschreibt, also in diesem Fall einfach $f'(x,y,z) \neq 0$ gilt. Am einfachsten geht dies in diesem Beispiel, indem man die 2-Norm der Ableitung berechnet:

$$\|f'(x,y,z)\|_2^2 = 4\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2 \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + z^2\right) = 4\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2 + z^2\right) = 4f(x,y,z)$$

Dies ist auf M offensichtlich gleich r^2, also ungleich null. Damit können wir den Satz vom regulären Wert anwenden und folgern, dass M (für $r \in (0,1)$) tatsächlich eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Dimension $3-1=2$ ist.

Der Tangentialraum ist einfach der Kern von f', also in unserem Fall

$$T_aM = \ker f'(1+\frac{r}{\sqrt{2}}, 0, \frac{r}{\sqrt{2}}) = \ker\begin{pmatrix}\frac{2r}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2r}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Für die Berechnung des Kerns einer Matrix sei auf die lineare Algebra Vorlesung verwiesen. Der Kern hier ist zweidimensional, eine Basis ist z.B. gegeben durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir zum Schluss noch den Fall $r = 1$. Hier ist die obige Herleitung nicht gültig, da nun $(0, 0, 0) \in M$ liegt, aber nicht in U. Oder anders ausgedrückt, die Funktion f ist nicht C^1 in einer Umgebung von M, man kann also den Satz vom regulären Wert nicht anwenden. Tatsächlich ist M für $r = 1$ keine Mannigfaltigkeit. Wenn M eine Mannigfaltigkeit wäre, hätte M Dimension 2, da in Punkten ungleich $(0, 0, 0)$ die Rechnung oben ihre Gültigkeit behält. Aber dann gäbe es nach dem Satz aus der Vorlesung eine Umgebung U von $(0, 0, 0)$, so dass $M \cap U$ die Nullstellenmenge einer C^1-Funktion g ist mit $\nabla g(0, 0, 0) \neq 0$. Der Vektor $N = \nabla g(0, 0, 0)$ ist dann Normalenvektor zu M in $(0, 0, 0)$. Da M rotationssymmetrisch ist bzgl. Rotationen um die z-Achse muss dies auch für den Vektor N gelten, also

$$N = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für ein $\lambda \neq 0$. Der Tangentialvektor für jede C^1-Kurve in M durch $(0, 0, 0)$ muss senkrecht auf N stehen. Aber die Kurve $\gamma(t) = (1 - \cos t, 0, \sin t)$ hat in $t = 0$ den Tangentialvektor

$$\dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieser ist offensichtlich nicht orthogonal zu N, womit wir einen Widerspruch zur Aussage haben, dass M eine Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung: Der Beweis, dass eine Menge *keine* Mannigfaltigkeit ist, ist of schwieriger als der umgekehrte Fall. Man muss dazu je nach Fall ein Argument ausdenken. In der Prüfung werden höchstens einfache Fälle auftreten, der obige wäre schon eher zu schwierig für die Prüfung.