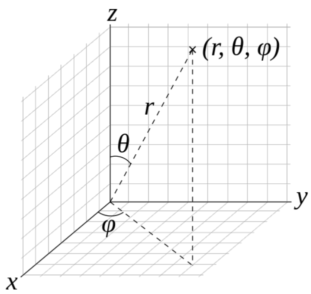
Musterlösung Serie 7

1. (Kugelkoordinaten)



Betrachte die folgende Abbildung (Kugelkoordinaten auf dem $\mathbb{R}^3$)

$$\Phi : \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta).$$

Zeige, dass diese Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus ist, und berechne die Ableitung (Jacobi-Matrix) der Umkehrabbildung.

Lösung:

Die Jacobi-Matrix von Φ selbst lautet

$$J_\Phi = d\Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

und besitzt die Determinante $r^2 \sin\theta$. Da $r > 0$ und $\theta \in (0, \pi)$, gilt $r^2 \sin\theta \neq 0$, also ist Φ lokal invertierbar. Es gilt:

$$J^{-1} = \frac{\partial(r, \theta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} & \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Oder in kartesischen Koordinaten (wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$):

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \\ \frac{xz}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-(x^2+y^2)}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (Babylonischer Algorithmus zur Bestimmung von $\sqrt{2}$.)
Zeige: Für jedes $x_0 \in [1, \infty)$ konvergiert die Folge (x_n) mit

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

gegen $\sqrt{2}$.

Wende zum Beweis den Banachschen Fixpunktsatz an auf die Funktion $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

Zusatzaufgabe: Zeige, dass die obige Fixpunktiteration für alle Startwerte $x_0 > 0$ gegen $\sqrt{2}$ und für alle Startwerte $x_0 < 0$ gegen $-\sqrt{2}$ konvergiert.

Bemerkung: *Dies ist ein Spezialfall der Newton-Iteration*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

zur Lösung der Gleichung $f(x) = 0$, in unserem Fall mit $f(x) = x^2 - 2$.

Lösung:

Wir zeigen zunächst, dass g auf $[1, \infty)$ eine Kontraktion ist. Für $x, y \in [1, \infty)$ gilt

$$g(y) - g(x) = \frac{y-x}{2} + \frac{x-y}{xy} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right)(y - x).$$

Nun gilt $0 < \frac{1}{xy} \leq 1$ und somit $-\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right) < \frac{1}{2}$. Demnach erfüllt g die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes. Ausserdem ist $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ äquivalent zu $x^2 - 2 = 0$ (da $x \neq 0$), was auf $[1, \infty)$ genau die Lösung $x = \sqrt{2}$ besitzt.

Sei nun $x_0 > 0$. Dann ist entweder $x_0 \geq 1$ und wir sind im obigen Fall. Oder es gilt $0 < x_0 < 1$. Dann ist aber $\frac{1}{x_0} > 1$ und insbesondere $x_1 \geq 1$, wir sind also nach dem ersten Iterationsschritt wiederum im obigen Fall.
Der Fall $x_0 < 0$ ist analog/symmetrisch.

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge welche den Ursprung enthält und

$$B : U \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit $B(0) = \mathbb{1}$. Zeige: Es existiert eine offene Teilmenge $0 \in V \subset U$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $A : V \to \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$A^2(x) = B(x), \qquad \text{für alle } x \in V.$$

Die Abbildung $A(x)$ heisst *Wurzel der Abbildung $B(x)$.*

Hinweis: *Wende das Inverse Funktionentheorem auf die Funktion $q : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $q(A) = A^2$, an der Stelle $A = \mathbb{1}$ an.*

Lösung:

Die Funktion $q : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $q(A) = A^2$, ist stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$dq(A) : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}, \qquad dq(A)C = CA + AC.$$

An der Stelle $A = \mathbb{1}$ erhalten wir

$$dq(\mathbb{1}) : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}, \qquad dq(\mathbb{1})C = 2C.$$

Da $dq(\mathbb{1})$ offenbar ein Isomorphismus ist, können wir den Umkehrsatz anwenden. Dieser besagt, dass offene Umgebungen $\mathbb{1} \in W_1 \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $\mathbb{1} = q(\mathbb{1}) \in W_2 \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ exitieren, sodass die Einschränkung

$$q|_{W_1} : W_1 \to W_2$$

ein C^1-Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist die Umkehrabbildung

$$(q|_{W_1})^{-1} : W_2 \to W_1$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar. Da die Abbildung $B : U \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig ist, ist die Menge

$$V := B^{-1}(W_2) := \{x \in U \,|\, B(x) \in W_2\}$$

eine offene Teilmenge von U. Ausserdem gilt $0 \in V$, da $B(0) = \mathbb{1}$. Definiere nun

$$A : V \to \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad A(x) := (q|_{W_1})^{-1}(B(x)).$$

Als Verkettung von stetig differenzierbaren Funktionen ist $A(x)$ stetig differenzierbar und erfüllt offenbar die Gleichung $A(x)^2 = B(x)$

4. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + uy + e^v &= 0 \\ 2x + u^2 - uv &= 5 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (2, 5) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung $(u(x, y), v(x, y))$ mit den folgenden Eigenschaften besitzt: Es gilt $u(2, 5) = -1$, $v(2, 5) = 0$ und die Abbildung $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ ist stetig differenzierbar. Berechne zusätzlich die Ableitung dieser Funktion im Punkt $(-1, 0)$.

Hinweis: *Wende das Implizite Funktionentheorem auf die Funktion*

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} x^2 + uy + e^v \\ 2x + u^2 - uv - 5 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(2, 5, -1, 0)$ *an.*

Lösung:

Wir wenden das Implizite Funktionentheorem auf die Funktion

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} x^2 + uy + e^v \\ 2x + u^2 - uv - 5 \end{pmatrix}$$

an. Es gilt $F(2, 5, -1, 0) = 0$ und die Rechnung

$$\partial_{(u,v)} F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} y & e^v \\ 2u - v & -u \end{pmatrix}, \qquad \partial_{(u,v)} F(2, 5, -1, 0) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

zeigt, dass $\partial_{(u,v)} F(2, 5, -1, 0)$ invertierbar ist. Es folgt nun aus dem Impliziten Funktionentheorem, dass eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von dem Punkt $(2, 5)$ zusammen mit einer Abbildung

$$\phi : U \to \mathbb{R}^2, \qquad \phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

existiert, für welche $\phi(2, 5) = (-1, 0)$ gilt und $F(x, y, \phi(x, y)) = 0$ für alle $(x, y) \in U$ erfüllt ist. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$0 = \partial_{(x,y)} F(x, y, \phi(x, y)) = \partial_{(x,y)} F(x, y, \phi(x, y)) + \partial_{(u,v)} F(x, y, \phi(x, y)) \circ \partial_{(x,y)} \phi(x, y)$$

und somit

$$
\begin{aligned}
d\phi(2,5) &= -\partial_{(u,v)}F(2,5,-1,0)^{-1}\partial_{(x,y)}F(2,5,-1,0) \\
&= -\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 18 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

5. Entscheide, ob die folgenden Mengen M Untermannigfaltigkeiten sind. Wenn ja, bestimme ausserdem deren Dimension und Tangentialräume.

   (a) $M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,|\, ||x|| = 1,\, ||y-x|| = 1\big\}$
   Hinweis: *Wende den Satz vom regulären Wert auf die Funktion* $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) := (||x||^2, ||x-y||^2)$, *an. (Die Quadrate erleichtern die Rechnung und sind nicht unbedingt erforderlich)*

   (b) $M := \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = 1\}$.
   Hinweis: *Die Ableitung* $d\det(A)B = tr(\mathrm{adj}(A)B)$ *wurde bereits in Serie 5, Aufgabe 4.(c), berechnet.*

   (c) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\}$.
   Hinweis: *Was passiert mit der zusammenhängende Menge* $M \cap B_\epsilon(0)$*, wenn wir den Ursprung* $(0,0)$ *entfernen? Ist so ein Verhalten für Untermannigfaltigkeiten möglich?*

   (d) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 - x^4 = 0\}$.

Lösung:

(a) Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) := (||x||^2, ||y-x||^2) = \big(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\, (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2\big)$$

Dann gilt $M = F^{-1}(1,1)$. Die Ableitung von F ist gegeben durch

$$dF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_2 & 2x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 2(x_1-y_1) & 2(x_2-y_2) & 2(x_3-y_3) & 2(y_1-x_1) & 2(y_2-x_2) & 2(y_3-x_3) \end{pmatrix}.$$

Sei nun $(x,y) \in M$: Aus $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$ folgt, dass die erste Zeile von $dF(x,y)$ ungleich 0 ist, und aus $(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2 = 1$ folgt, dass alle Einträge der zweiten Zeile nicht verschwinden. Insbesondere sind beide Zeilen linear unabhängige Vektoren, $\mathrm{rk}(df(x,y)) = 2$ und $df(x,y)$ ist surjectiv. Da dies für alle $(x,y) \in M = F^{-1}(1,1)$ gilt, ist $(1,1)$ ein regulärer Wert von F. Aus dem Satz vom regulären Wert folgt nun, dass M eine 4-dimensionale Untermanigfaltigkeit ist.
Ausserdem beschreibt F die Tangentialräume von M:

$$T_{(x,y)}M = \ker(dF(x,y) : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2)$$

Die Ableitung lässt sich kompakt schreiben als

$$dF(x,y)[\hat{x},\hat{y}] = \begin{pmatrix} 2\langle x, \hat{x}\rangle \\ 2\langle x-y, \hat{x}-\hat{y}\rangle \end{pmatrix}$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das standard Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Damit folgt

$$T_{(x,y)}M = \left\{ (\hat{x},\hat{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} \langle x, \hat{x}\rangle = 0 \\ \langle x-y, \hat{x}-\hat{y}\rangle = 0 \end{matrix} \right\}.$$

(b) Die Menge $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ der invertierbaren Matrizen ist eine offene Teilmenge des Vektorraums aller $(n \times n)$-Matrizen. Für $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ist die Ableitung der Determinantenfunktion an der Stelle A (gemäss Serie 3, Aufgabe 2) gegeben durch

$$d\det(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad B \mapsto \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}B).$$

Diese ist offenbar surjektiv, dann für $B = A$ erhalten wir

$$d\det(A)A = \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}A) = \det(A)\mathrm{tr}(\mathbb{1}) = n\det(A) \neq 0.$$

Insbesondere ist $d\det(A)$ für alle $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ surjectiv und 1 ein regulärer Wert der Determinantenfunktion. Aus dem Satz vom regulären Wert folgt nun, dass $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ eine $(n^2 - 1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist mit den Tangentialräumen

$$T_A\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \ker(d\det(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}) = \left\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, \mathrm{tr}(A^{-1}B) = 0\right\}.$$

(c) Die Menge M ist die Vereinigung der beiden Koordinatenachsen. Wir zeigen via Widerspruch, dass f im Ursprung die Definition einer Untermannigfaltigkeit nicht erfüllen kann. Wir nehmen also an, dass für ein genügend kleines $\epsilon > 0$ ein Diffeomorphismus

$$f : B_\epsilon(0) \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit } f(0,0) = (0,0) \text{ und } f(B_\epsilon(0) \cap M) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$$

existiert. Da $B_\epsilon(0) \cap M$ (weg-)zusammenhängend ist, ist auch das Bild $f(B_\epsilon(0) \cap M)$ zusammenhängend und somit ein Intervall. Das heisst, es existieren $a < b$ für welche die Charakterisierung

$$f(B_\epsilon(0) \cap M) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a < x < b,\ y = 0\} = (a,b) \times \{0\}$$

gilt. Wenn wir den Ursprung entfernen, zerfällt $B_\epsilon(0) \cap M$ in vier Zusammhangskomponenten, während das Bild $f(B_\epsilon(0))$ nur in die zwei Zusammhangskomponenten $(a,0) \times \{0\}$ und $(0,b) \times \{0\}$ zerfällt. Dies Wiederspricht aber der Aussage, dass f ein Diffeomorphismus ist. Denn stetige Abbildungen bilden zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen ab und somit kann die Einschränkung

$$f : (B_\epsilon(0) \cap M)\backslash\{(0,0)\} \to (a,0) \times \{0\} \cup (0,b) \times \{0\}$$

keine stetige Umkehrabbildung besitzten.

(d) Wir können das gleiche Argument wie in Teil (c) anwenden. Wir müssen dafür nur zeigen, dass für genügend kleines $\epsilon > 0$ die Menge $(B_\epsilon(0) \cap M)\backslash\{(0,0)\}$ aus mindestens vier Zusammenhangskomponenten besteht. M schneidet die y-Achse nur im Ursprung und die x-Achse in den Punkten -1, 0, 1. Bezeichne nun die offenen Quadranten des $\mathbb{R}^2$ mit

$$V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\, y > 0\}, \qquad V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < 0,\, y > 0\},$$

$$V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < 0,\, y < 0\}, \qquad V_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\, y < 0\}.$$

und wähle $0 < \epsilon < 1$. Dann schneidet die Menge $M_0 := (B_\epsilon(0) \cap M)\backslash\{(0,0)\}$ keine der Koordinatenachsen und wir erhalten die disjunkte Zerlegung

$$M_0 = (V_1 \cap M_0) \cup (V_2 \cap M_0) \cup (V_3 \cap M_0) \cup (V_4 \cap M_0).$$

Jede dieser Schnittmengen ist offenbar nicht leer, da die Punkte $(\pm x, \pm x\sqrt{1 - x^2}) \in M_0$ enthalten sind. Dies zeigt, dass M_0 mindestens 4 verschiedene Zusammenhangskomponenten besitzt.