# Musterlösung Serie 8

1. Seien $a, b, c > 0$ gegeben. Bestimme den achsenparallelen Quader grössten Volumens, der dem Ellipsoid
$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$
einbeschrieben ist.

**Hinweis:** *Interpretiere das Problem als ein Maximierungsproblem unter Nebenbedingungen: Falls $(x, y, z) \in E \cap \mathbb{R}^3_{\geq 0}$ die Ecke des Quaders im ersten Oktanten ist, dann ist das Volumen des Quaders durch $v(x, y, z) = 8xyz$ gegeben.*

**Lösung:**

Ein achsenparalleler Quader $Q$ dessen Ecken auf dem Ellipsoid $E$ liegen ist bereits durch die Angabe einer seiner Ecken gegeben. Alle anderen Ecken erhält man durch Spiegelung dieser einen Ecke an den verschiedenen Koordinatenebenen. Wir betrachten die Ecke im ersten Oktanten, das heisst mit $x, y, z \geq 0$. Die Seitenlängen des Quaders sind dann $2x$, $2y$ und $2z$. Folglich ist das Volumen des Quaders gegeben durch $8xyz$. Wir möchten also die Funktion
$$v : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0\} \to \mathbb{R}, \qquad v(x, y, z) := 8xyz$$
unter der Nebenbedingung $g = 0$ mit
$$g : \mathbb{R}^3_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \qquad g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$
maximieren. Beachte, dass $v(x, y, z) = 0$ gilt, falls eine der Koordinaten verschwindet. Folglich befindet sich das Maximum im Inneren des ersten Oktanten und wir können den Ansatz der Lagrange-Multiplikatoren verwenden. Zunächst berechnen wir
$$\nabla v(x, y, z) = \begin{pmatrix} 8yz \\ 8xz \\ 8xy \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix}.$$
In einer Maximalstelle $(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $g$ existiert dann eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ für welche $\nabla v(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ gilt. Das heisst
$$8yz = \lambda \frac{2x}{a^2}, \qquad 8xz = \lambda \frac{2y}{b^2}, \qquad 8xy = \lambda \frac{2z}{c^2}$$
Wenn wir die erste Gleichung mit $x$, die zweite mit $y$ und die dritte mit $z$ multiplizieren folgt
$$8xyz = \lambda \frac{2x^2}{a^2}, \qquad 8xyz = \lambda \frac{2y^2}{b^2}, \qquad 8xyz = \lambda \frac{2z^2}{c^2}.$$
Wir haben oben bereits bemerkt, dass in einer Maximalstelle $x, y, z > 0$ gilt. Folglich gilt $\lambda \neq 0$ und die Bedingung oben liefert $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$. Die Nebenbedingung besagt, dass die Summe dieser drei Terme gleich 1 ist und somit
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$

gilt. Damit erhalten wir

$$x = \frac{a}{3}\sqrt{3}, \qquad y = \frac{b}{3}\sqrt{3}, \qquad z = \frac{c}{3}\sqrt{3}.$$

2. (a) Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) := x^2 - y^2 + z$$

auf der Menge $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(b) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn man $f$ stattdessen auf der Menge

$$\tilde{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } z \geq 0\}$$

betrachtet?

**Lösung:**

(a) Da $B$ eine kompakte Menge ist, ist $f$ auf $B$ beschränkt und nimmt seine globalen Extrama an. Wir bestimmen im folgenden alle Kandidaten für kritische Punkte und vergleichen deren Funktionswerte. Eine genaue Bestimmung der Art der kritischen Punkt ist nicht notwendig. Der Gradient von $f$ ist gegeben durch

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für alle $(x, y, z) \in B$ gilt offenbar $\nabla f \neq 0$ und $f$ besitzt keine lokalen Extrema im Inneren von $B$. Insbesondere kann $f$ seine globalen Extrema nicht im Inneren von $B$ annehmen. Extrema von $f$ auf dem Rand $\partial B$ bestimmen wir mit Lagrange-Multiplikatoren bezüglich der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Dies führt auf die Gleichung

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Falls $x \neq 0$ gilt, folgt $\lambda = 1$, $y = 0$ und $z = \frac{1}{2}$. Mit der Nebenbedingung folgt $x^2 = 1 - (\frac{1}{2})^2$ und wir erhalten die kritischen Punkte

$$P_{\pm}^{(1)} = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \qquad f\left(P_{\pm}^{(1)}\right) = \frac{5}{4}.$$

Falls $x = 0$ und $y \neq 0$ gilt, folgt $\lambda = -1$ und $z = -\frac{1}{2}$. Mit der Nebenbedingung folgt $y^2 = 1 - (\frac{1}{2})^2$ und wir erhalten die kritischen Punkte

$$P_{\pm}^{(2)} = \left(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \qquad f\left(P_{\pm}^{(2)}\right) = -\frac{5}{4}.$$

Falls $x = y = 0$ gilt erhalten wir mit der Nebenbedingung $z^2 = 1$ und somit die kritischen Punkte

$$P_{\pm}^{(3)} = (0, 0, \pm 1), \qquad f\left(P_{\pm}^{(3)}\right) = \pm 1.$$

Ein Vergleich der Funktionswerte in den Punkten $P_{\pm}^{(1)}, P_{\pm}^{(2)}, P_{\pm}^{(3)}$ liefert: $f$ nimmt sein globales Maximum in den Punkten $P_{\pm}^{(1)}$ an und sein globales Minimum in den Punkten $P_{\pm}^{(2)}$.

(b) Durch die Bedingung $z \geq 0$ fallen die kritischen Punkte $P_{\pm}^{(2)}$ und $P_{-}^{(3)}$ weg. Mögliche neue kritische Punkte suchen wir auf der Menge $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } z = 0\}$. Auf dieser vereinfacht sich $f$ zur Funktion $\tilde{f}(x, y) = x^2 - y^2$, deren Gradient genau dann gleich 0 ist, wenn $x = y = 0$ gilt. Somit erhalten wir den kritischen Punkt $P^{(0)} = (0, 0, 0)$.

Der Rand $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z = 0\}$ lässt sich leicht parametrisieren durch $x = \sin(\theta), y = \cos(\theta)$ für $0 \leq \theta < 2\pi$. Dies liefert uns die kritischen Punkte

$$P_{\pm}^{(4)} = (\pm 1, 0, 0) \quad \text{und} \quad P_{\pm}^{(5)} = (0, \pm 1, 0)$$

mit Funktionswerten 1 bzw. $-1$.

Ein Vergleich der Funktionswerte zeigt uns, dass $f$ sein globales Maximum weiterhin in den Punkten $P_{\pm}^{(1)}$ annimmt, sein globales Minimum nun jedoch in den Punkten $P_{\pm}^{(5)}$ und $P_{+}^{(3)}$.

3. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = y^2$$

auf der Menge $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - xy + 2y^2 - 1 \leq 0\}$.

**Hinweis:** *Um diese Aufgabe mit Lagrange-Multiplikatoren zu lösen, ist zunächst zu klären, dass $B$ eine beschränkte Teilmenge ist. Dies folgt bspw. mit der Abschätzung $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.*

**Lösung:**

Definiere

$$g(x, y) := x^2 - xy + 2y^2 - 1.$$

Aus der Ungleichung $0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ folgt die Abschätzung

$$g(x, y) \geq x^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 2y^2 - 1 \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - 1 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 1.$$

Damit folgt

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) \leq 0\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 2\}$$

und $B$ ist beschränkt. Da $B$ offenbar abgeschlossen ist, ist $B$ kompakt und die Funktion $f$ nimmt auf $B$ globale Extrema an. Diese einleitende Diskussion ist notwendig, da wir im Folgenden nur notwendige Kriterien benutzen und a priori wissen müssen ob globale Extremalstellen existiere.

Der Gradient von $f$ ist gegeben durch

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix}$$

und liefert die kritischen Punkte

$$C := \{(x, y) \in B \,|\, y = 0\} = \{(x, 0) \,|\, -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1] \times \{0\}.$$

Alle Punkte in $C$ liefern den Funktionswert $f(C) = 0$ und diese sind offenbar globale Minima für $f$ (da $f \geq 0$ überall gilt).

Der Gradient

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 4y - x \end{pmatrix}$$

verschwindet nur für $(x, y) = (0, 0)$ und somit erfüllen globale Extrema auf dem Rand $\partial B = \{g = 0\}$ die Lagrange-Bedingung. D.h. es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x - y \\ 4y - x \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda = 0$ erhalten wir die Punkte in $C \cap \partial B$. Für $\lambda \neq 0$ folgt $2x = y$ und die Bedingung $g(x, y) = 0$ liefert $x = \pm\sqrt{\frac{1}{7}}$. Das liefert die Kandidaten $P_\pm = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{7}}, 2\sqrt{\frac{1}{7}}\right)$. Diese haben den gleichen Funktionswert $f(P_\pm) = \frac{4}{7}$ und sind folglich globale Maxima von $f$.

4. Seien $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ und $p_1, \ldots, p_n > 0$ reelle Zahlen mit $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Zeige die Ungleichung:

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n$$

**Hinweis:** *Maximiere* $f(a_1, \ldots a_n) = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}$ *under der Nebenbedingung* $g(a_1, \ldots, a_n) = p_1 a_1 + \cdots p_n a_n - c = 0$. *Die Lösung dieses Maximierungsproblems beantwortet wie gross die linke Seite höchstens werden, wenn wir den Wert auf der rechten Seite vorgeben. Hieraus lässt sich die Ungleichung direkt folgern.*

**Lösung:**

Diese Aufgabe illustriert ein mächtiges Werkzeug, um Ungleichungen analytisch zu beweisen. Die Strategie ist hierbei eine Seite der Ungleichung festzuhalten und die andere unter dieser Nebenbedingung zu maximieren.

Seien $p_1, \ldots, p_n > 0$ reelle Zahlen mit $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Wir bezeichnen mit $c > 0$ den Wert der Ungleichung auf der rechten Seite. Da

$$B_c := \{(a_1, \ldots a_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n = c\}$$

eine kompakte Menge ist, nimmt die Funktion

$$f : B_c \to \mathbb{R}, \qquad f(a_1, \ldots, a_n) = a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n}$$

ihre globalen Extrema an. Falls für eine der Koordinaten $a_j = 0$ gilt, so verschwindet $f$ und wir landen in einem globalen Minimum. Folglich nimmt $f$ sein globales Maximum im *Inneren von* $B_c$ an (damit meinen wir die Untermannigfaltigkeit $B_c \cap \mathbb{R}^n_{>0}$).

Wir berechnen dieses Maximum mit Lagrange-Multiplikatoren, wobei die Nebenbedingung $g = 0$ durch die folgende Funktion gegeben ist

$$g : \mathbb{R}^n_{>0} \to \mathbb{R}, \qquad g(a_1, \ldots, a_n) = p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n - c.$$

Es gilt

$$\nabla f(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} p_1 a_1^{p_1 - 1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} \\ \vdots \\ p_n a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n - 1} \end{pmatrix} = a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n} \begin{pmatrix} p_1 / a_1 \\ \vdots \\ p_n / a_n \end{pmatrix}$$

und

$$\nabla g(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Da $\nabla g \neq 0$ für alle $(a_1, \ldots, a_n) \in g^{-1}(0)$ gilt, können wir den Satz der Lagrange-Multiplikatoren anwenden. In Extremalstellen von $f$ unter der Nebenbedingung $g = 0$ existiert $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\nabla f = \lambda \nabla g$. Dies liefert

$$a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n} \frac{p_j}{a_j} = \lambda p_j \qquad \text{für alle } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Da die linke Seite nicht verschwindet, ist $\lambda \neq 0$ und wir folgern

$$\frac{a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n}}{\lambda} = a_j \qquad \text{für alle } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Insbesondere zeigt dies, dass $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ gilt, und mit der Nebenbedingung folgt

$$c = p_1 a_1 + \cdots p_n a_n = p_1 a_1 + \cdots p_n a_1 = (p_1 + \cdots + p_n) a_1 = a_1$$

Somit nimmt $f$ unter der Nebenbedingung $B_c$ sein Maximum an der Stelle $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = c$ an. Der dazugehörige Funktionswert lautet

$$f(c, \ldots, c) = c^{p_1} \cdots c^{p_n} = c^{p_1 + \cdots + p_n} = c.$$

Wir fassen nochmal zusammen wie aus diesem Maximierungsproblem die Ungleichung folgt: Für $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ definiere $c := p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n$. Die Lösung des Maximierungsproblems liefert

$$a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n} \leq \max_{(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) \in B_c} \tilde{a}_1^{p_1} \cdots \tilde{a}_n^{p_n} = \max_{(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) \in B_c} f(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = c = p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n$$

und dies ist die gewünschte Ungleichung. Des weiteren zeigt unsere Rechnung, dass Gleichheit genau dann erfüllt ist, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ gilt.

5. Betrachte die Abbildung

$$f : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6, \qquad f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy).$$

(a) Zeige, dass das Bild dieser Abbildung durch

$$M := \left\{ (u, v, w, a, b, c) \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; \begin{array}{llll} vw = a^2, & wu = b^2, & uv = c^2, & u + v + w = 1, \\ ab = cw, & bc = au, & ca = bv & \end{array} \right\}$$

gegeben ist.

(b) Benutze diese Darstellung um zu verifizieren, dass $M$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^6$ ist.

**Hinweis:** *Sei* $U := \{(u, v, w, a, b, c) \in \mathbb{R}^6 \,|\, u \neq 0\}$. *Zeige, dass*

$$M \cap U = \{(u, v, w, a, b, c) \in U \,|\, wu = b^2,\; uv = c^2,\; bc = au,\; u + v + w = 1\}$$

*D.h.* $M \cap U$ *wird bereits von vier Gleichungen beschrieben wird. Benutze diese vier Gleichungen und den Satz vom regulären Wert um zu zeigen, dass* $M \cap U$ *eine Untermannigfaltigkeit ist. Zeige analog für* $V := \{v \neq 0\}$ *und* $W := \{w \neq 0\}$*, dass* $M \cap V$ *und* $M \cap W$ *Untermannigfaltigkeiten sind. Schliesse hieraus, dass* $M$ *eine Untermannigfaltigkeit ist.*

**Lösung:**

(a) Man überprüft leicht, dass jeder Punkt im Bild von $f$ die Gleichungen von $M$ erfüllt und somit $f(S^2) \subset M$ gilt.

Die umgekehrte Richtung ist der schwierige Teil der Aufgabe. Sei also $(u, v, w, a, b, c) \in M$ gegeben. Wir zeigen zunächst, dass

$$u, v, w \geq 0$$

gilt. Falls $u < 0$ wäre, folgt aus den Gleichungen $wu = b^2$ und $uv = c^2$, dass $w \leq 0$ und $v \leq 0$ gilt. Damit kann die Gleichung $u + v + w = 1$ aber nicht mehr efüllt sein. In den Fällen $v < 0$ oder $w < 0$ erhält man auf die gleiche Weise einen Wiederspruch.

Da $u + v + w = 1$ gilt, können nicht alle drei Koordinaten gleichzeitig verschwinden. Wir betrachten zunächst den Fall $u \neq 0$ und definieren

$$x := \sqrt{u}, \qquad y := \frac{c}{\sqrt{u}}, \qquad z := \frac{b}{\sqrt{u}}.$$

Mit den Relationen in $M$ folgt

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{u^2 + b^2 + c^2}{u} = \frac{u^2 + uv + wu}{u} = u + v + w = 1$$

und somit gilt $(x, y, z) \in S^2$. Desweiteren folgen direkt aus der Definition von $x$, $y$ und $z$ die Gleichungen $u = x^2$, $xy = c$ und $zx = b$. Unter Benutzung der Relationen in $M$ erhalten wir zusätzlich

$$yz = \frac{bc}{u} = \frac{au}{u} = a, \qquad y^2 = \frac{c^2}{u} = \frac{uv}{u} = v, \qquad z^2 = \frac{b^2}{u} = \frac{wu}{u} = w.$$

Das zeigt, dass $f(x, y, z) = (u, v, w, a, b, c)$ erfüllt ist. Falls $v \neq 0$ oder $w \neq 0$ gilt, können wir auf analoge Weise ein Urbild konstruieren.

(b) Die Menge $M$ wird durch 7 Gleichung im $\mathbb{R}^6$ beschrieben. Wir zeigen, dass lokal bereits 4 Gleichungen genügen. Zusätzlich zeigen wir, dass die Menge $M$ als Niveaufläche eines regulären Wertes dieser Gleichungen dargestellt werden kann. Damit folgt dann, dass $M$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Wie bereits in Teil (a) folgt aus der Gleichung $u+v+w = 1$, dass mindestens eine dieser drei Koordinaten nicht verschwindet. Wir betrachten im Folgenden den Fall $u \neq 0$, die anderen Fälle können analog behandelt werden.

Wir zeigen zunächst die Beziehung

$$\{(u, v, w, a, b, c) \in M \mid u \neq 0\} = \left\{ (u, v, w, a, b, c) \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; \begin{array}{c} u \neq 0,\ wu = b^2,\ uv = c^2 \\ bc = au,\ u + v + w = 1 \end{array} \right\}.$$

Das heisst die 4 Gleichungen auf der rechten Seite beschreiben $M$ bereits vollständig. Die Inklusion „$\subset$“ ist offensichtlich. Sei also nun $(u, v, w, a, b, c)$ ein Element der Menge auf der rechten Seite. Um zu zeigen, dass dieser Punkt auch in $M$ liegt, müssen wir die drei fehlenden Relationen folgern:

- Es gilt $a^2 = vw$: Aus $wu = b^2$, $uv = c^2$ und $au = bc$ folgt

  $$wu \cdot uv = b^2 c^2 = (au)^2 \qquad \Rightarrow \qquad u^2 wv = u^2 a^2 \qquad \Rightarrow \qquad wv = a^2.$$

  Dabei haben wir im letzen Schritt $u \neq 0$ verwendet.
- Es gilt $ab = cw$: Wir multiplizieren die Gleichungen $bc = au$ und $wu = b^2$ und erhalten

  $$wu \cdot bc = aub^2 \qquad \Rightarrow \qquad b \cdot cw = b \cdot ab.$$

  Falls $b \neq 0$ gilt, folgt die Behauptung direkt. Falls $b = 0$ gilt, folgt aus der Gleichungen $wu = b^2$, dass $w = 0$ gilt, und somit ist $ab = 0 = cw$ ebenfalls erfüllt.
- Es gilt $ca = bv$: Wir multiplizieren die Gleichungen $bc = au$ und $uv = c^2$ und erhalten

  $$uv \cdot bc = auc^2 \qquad \Rightarrow \qquad c \cdot bv = c \cdot ca.$$

  Falls $c \neq 0$ gilt, folgt die Behauptung direkt. Falls $c = 0$ gilt, folgt aus der Gleichung $uv = c^2$, dass $v = 0$ gilt, und somit $ca = 0 = bv$ ebenfalls erfüllt ist.

Definiere $U := \{(u, v, w, a, b, c) \in \mathbb{R}^6 \mid u \neq 0\}$ und

$$F : U \to \mathbb{R}^4, \qquad F(u, v, w, a, b, c) := \begin{pmatrix} b^2 - wu \\ c^2 - uv \\ bc - au \\ u + v + w - 1 \end{pmatrix}.$$

Dann zeigt unsere Rechnung oben die Beziehung

$$M \cap U = F^{-1}(0,0,0,0)$$

und es verbleibt nur noch zu zeigen, dass $(0,0,0,0)$ ein regulärer Wert von $F$ ist. Dazu berechnen wir

$$dF(u,v,w,a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & 2b & 0 & -w & 0 & -u \\ 0 & 0 & 2c & -v & -u & 0 \\ -u & c & b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir unterscheiden drei Fälle um zu zeigen, dass diese Matrix für Punkte in $M \cap U$ vollen Rang hat.

- Falls $b, c = 0$ gilt, so folgt aus den Gleichungen für $M$, dass $v = 0$, $w = 0$, $a = 0$ und $u = 1$ gilt. Die erste, vierte, fünfte und sechste Spalte von $dF$ sind in diesem Fall linear unabhängig, da

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)(-1) = 1 \neq 0.$$

  Folglich ist der Spaltenrang von $dF$ mindestens vier und da $dF$ nur vier Zeilen besitzt, ist das bereits der maximale Rang.

- Falls $b \neq 0$ gilt, so sind die erste, zweite, fünfte und sechste Spalte von $dF$ linear unabhängig, da

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2b & 0 & -u \\ 0 & 0 & -u & 0 \\ -u & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-u) \det \begin{pmatrix} 2b & 0 & -u \\ 0 & -u & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2bu^2 \neq 0$$

  und $dF$ hat maximalen Rang.

- Falls $c \neq 0$ gilt, so sind die erste, dritte, fünfte und sechste Spalte von $dF$ linear unabhängig, da

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 2c & -u & 0 \\ -u & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-u) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u \\ 2c & -u & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2cu^2 \neq 0$$

  und $dF$ hat maximalen Rang.

Wir haben somit gezeigt, dass $(0,0,0,0)$ ist ein regulärer Wert von $F$ ist. Mit dem Satz vom regulären Wert folgt nun, dass $M \cap U$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^6$ ist.

Analog zeigt man für die Mengen $V := \{(u,v,w,a,b,c) \in \mathbb{R}^6 \mid v \neq 0\}$ und $W := \{(u,v,w,a,b,c) \in \mathbb{R}^6 \mid w \neq 0\}$, dass die Durchschnitte $V \cap M$ und $W \cap M$ Untermannigfaltigkeiten sind. Da die offenen Mengen $U, V, W$ die gesammte Menge $M$ überdecken, folgt schliesslich, dass $M$ ebenfalls eine Untermannigfaltigkeit ist.