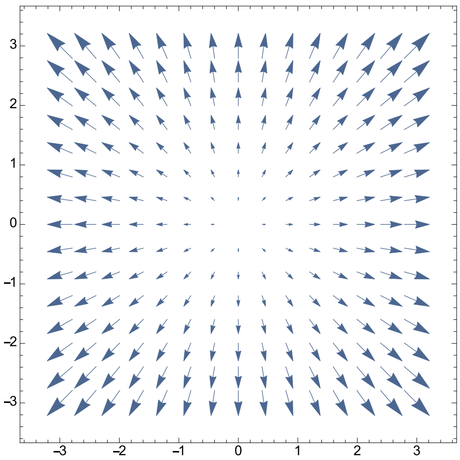
Musterlösung Serie 9

1. Berechne die Divergenz der folgenden Vektorfelder. Im zweidimensionalen Fall skizziere auch die Felder, im dreidimensionalen Fall berechne auch die Rotation.

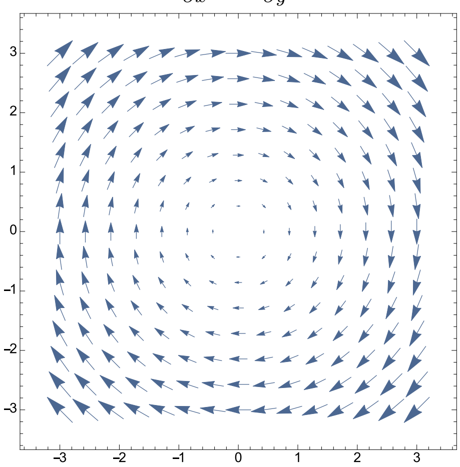
   (a) $v(x, y) = (x, y)$
   (b) $v(x, y) = (y, -x)$
   (c) $v(x, y) = (x, -y)$
   (d) $v(x, y, z) = (z, x, y)$
   (e) $v(x, y, z) = (xyz, x^2 z, x^2 y)$
   (f) $v(x, y, z) = (x, y, z) \times \omega$ für $\omega \in \mathbb{R}^3$

Lösung:

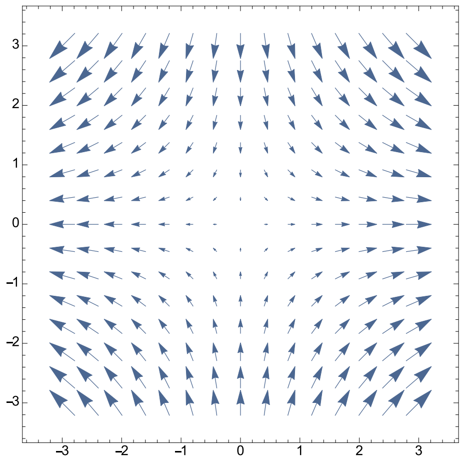
(a) Es gilt $\operatorname{div} v = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 1 + 1 = 2.$



(b) Es gilt $\operatorname{div} v = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial(-x)}{\partial y} = 0 + 0 = 0.$



(c) Es gilt $\operatorname{div} v = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} = 1 - 1 = 0.$



(d) Analog zu (b) gilt $\operatorname{div} v = 0$, während $\operatorname{rot} v = (1, 1, 1)$.

(e) Es gilt $\operatorname{div} v = yz + 0 + 0 = yz$.
Sei $f(x, y, z) := x^2 yz$; dann haben wir $v(x, y, z) = \nabla f + (-xyz, 0, 0)$. Mithilfe von 2.(c) und der Linearität der Rotation folgt also $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot}(-xyz, 0, 0) = (0, -xy, xz)$.

(f) Analog zu (b) gilt $\operatorname{div} v = 0$, während

$$\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} -\omega_1 - \omega_1 \\ -\omega_2 - \omega_2 \\ -\omega_3 - \omega_3 \end{pmatrix} = -2\omega\,.$$

2. Sei f ein Skalarfeld (eine Funktion) und seien $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$, jeweils hinreichend oft stetig differenzierbar.
Der *Gradient* von f ist das Vektorfeld $\operatorname{grad} f := \nabla f$.
Die *Rotation* von K ist das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} K := \nabla \times K = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial y} - \frac{\partial K_2}{\partial z} \\ \frac{\partial K_1}{\partial z} - \frac{\partial K_3}{\partial x} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Die *Divergenz* von K ist das Skalarfeld

$$\operatorname{div} K := \nabla \cdot K = \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{\partial K_3}{\partial z}.$$

Beweise die folgenden Identitäten:

(a) $\operatorname{div}(fK) = \nabla f \cdot K + f \operatorname{div} K$
(b) $\operatorname{div}(K \times L) = L \cdot \operatorname{rot} K - K \cdot \operatorname{rot} L$
(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$
(d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} K) = 0$
(e) $\operatorname{div}(f \operatorname{rot} K) = \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{rot} K$
(f) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f$
(g) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} K = \operatorname{grad} \operatorname{div} K - \operatorname{div} \operatorname{grad} K = \operatorname{grad} \operatorname{div} K - \Delta K$

Hierbei bezeichnet $\cdot$ das Skalarprodukt. Bei der letzten Teilaufgabe ist der Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ komponentenweise auf das Vektorfeld K anzuwenden.

Lösung:

Wir setzen voraus, dass $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder im Raum sind, während $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Wir kürzen ausserdem ab: $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ etc.

(a) Durch Anwenden der Definition der Divergenz und der Produktregel für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fK) &= \partial_x(fK_1) + \partial_y(fK_2) + \partial_z(fK_3) \\ &= (\partial_x f) \cdot K_1 + f \cdot (\partial_x K_1) + (\partial_y f) \cdot K_2 + f \cdot (\partial_y K_2) + (\partial_z f) \cdot K_3 + f \cdot (\partial_z K_3) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} + f \cdot (\partial_x K_1 + \partial_y K_2 + \partial_z K_3) \\ &= \nabla f \cdot K + f \cdot \operatorname{div} K\,. \end{aligned}$$

(b) Durch Anwenden der Definition der Divergenz und der Produktregel für die partiellen

Ableitungen erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(K \times L) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} K_2L_3 - K_3L_2 \\ K_3L_1 - K_1L_3 \\ K_1L_2 - K_2L_1 \end{pmatrix} \\
&= \partial_x(K_2L_3 - K_3L_2) + \partial_y(K_3L_1 - K_1L_3) + \partial_z(K_1L_2 - K_2L_1) \\
&= K_2\partial_x L_3 - K_3\partial_x L_2 + L_3\partial_x K_2 - L_2\partial_x K_3 + K_3\partial_y L_1 - K_1\partial_y L_3 \\
&\quad + L_1\partial_y K_3 - L_3\partial_y K_1 + K_1\partial_z L_2 - K_2\partial_z L_1 + L_2\partial_z K_1 - L_1\partial_z K_2 \\
&= -K_1(\partial_y L_3 - \partial_z L_2) + L_1(\partial_y K_3 - \partial_z K_2) - K_2(\partial_z L_1 - \partial_x L_3) \\
&\quad + L_2(\partial_z K_1 - \partial_x K_3) - K_3(\partial_x L_2 - \partial_y L_1) + L_3(\partial_x K_2 - \partial_y K_1) \\
&= -K \cdot \operatorname{rot} L + L \cdot \operatorname{rot} K \\
&= L \cdot \operatorname{rot} K - K \cdot \operatorname{rot} L \,.
\end{aligned}
$$

(c) Durch Anwenden der Definition der Rotation und des Gradienten sowie der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen erhalten wir

$$
\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y f_z - \partial_z f_y \\ \partial_z f_x - \partial_x f_z \\ \partial_x f_y - \partial_y f_x \end{pmatrix} = 0\,.
$$

(d) Durch Anwenden der Definitionen der Divergenz und der Rotation sowie der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot} K) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_y K_3 - \partial_z K_2 \\ \partial_z K_1 - \partial_x K_3 \\ \partial_x K_2 - \partial_y K_1 \end{pmatrix} \\
&= \partial_x\partial_y K_3 - \partial_x\partial_z K_2 + \partial_y\partial_z K_1 - \partial_y\partial_x K_3 + \partial_z\partial_x K_2 - \partial_z\partial_y K_1 = 0\,.
\end{aligned}
$$

(e) Durch Anwenden der Resultate aus den Teilaufgaben a) und d) erhalten wir

$$
\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{rot} K) \overset{\text{a)}}{=} \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{rot} K + f \cdot \operatorname{div}(\operatorname{rot} K) \overset{\text{d)}}{=} \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{rot} K\,.
$$

(f) Dies folgt direkt aus den Definitionen und der Tatsache, dass $\partial_x\partial_x f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und so weiter.

(g) Wir können die Graßmann-Identität $(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c})$ anwenden und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\operatorname{rot} K = \nabla \times (\nabla \times K) = (\nabla \cdot K)\nabla - (\nabla \cdot \nabla)K = \nabla \operatorname{div} K - \Delta K \\
= \operatorname{grad}\operatorname{div} K - \Delta K = \operatorname{grad}\operatorname{div} K - \operatorname{div}\operatorname{grad} K,
\end{aligned}
$$

wobei "$\Delta K = \operatorname{div}\operatorname{grad} K$" aus (f) folgt.

3. Ermittle mittels Picard-Lindelöf-Iteration die Lösung des Anfangswertproblems

$$
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Lösung:

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
x^{[0]}(t) &= x_0 = 1,\\
x^{[\ell+1]}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} -y^{[\ell]}(s)\,ds,\\
y^{[0]}(t) &= y_0 = 0,\\
y^{[\ell+1]}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} x^{[\ell]}(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Somit ist $x^{[\ell]}(t)$ gerade das ℓ-te Taylorpolynom von $\cos t$ und $y^{[\ell]}(t)$ das ℓ-te Taylorpolynom von $\sin t$, also konvergieren die $x^{[\ell]}(t)$ gegen $1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots = \cos t$ und die $y^{[\ell]}(t)$ gegen $t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots = \sin t$.

4. Konstruiere ein im ganzen Raum definiertes Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das die Schraubenlinien

$$\gamma_{r,\theta} \;:\; t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ t-\theta \end{pmatrix}, \qquad r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}$$

als Feldlinien besitzt.

Lösung:

Die Feldlinien γ zu einem Vektorfeld V sind charakterisiert durch die Differentialgleichung $\gamma' = V(\gamma)$. Das gesuchte Vektorfeld $V \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ muss also die Eigenschaft $\gamma'_{r,\theta}(t) = V(\gamma_{r,\theta}(t))$ für alle $t, r, \theta \in \mathbb{R}$ erfüllen, d. h.

$$\begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma'_{r,\theta}(t) \overset{!}{=} V(\gamma_{r,\theta}(t)) = V\left(\begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ t-\theta \end{pmatrix}\right).$$

Dies wird gelöst durch das Vektorfeld

$$V\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf Ω, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall so dass $0 \in I$ und bezeichne mit

$$\Phi : U := I \times \Omega \to \Omega$$

den durch das Vektorfeld v erzeugten Fluss auf $U := I \times \Omega$. Dieser ist (im Existenzfall) definiert durch die Bedingung, dass für jedes $x_0 \in \Omega$ die Kurve $x : I \to \Omega$, $x(t) := \Phi(t, x_0)$, die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = v(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

löst. Falls der Fluss Φ stetig differenzierbar ist, definiere für $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ die Kurve

$$\xi : I \to \mathbb{R}^n, \qquad \xi(t) := d\Phi_t(x_0)\xi_0$$

mit der Notation $\Phi_t(x) := \Phi(t, x)$. Zeige, dass ξ die Differentialgleichung

$$\dot{\xi}(t) = dv(x(t))\xi(t), \qquad \xi(0) = \xi_0$$

erfüllt.

Hinweis: *Wende den Satz von Schwarz über die Existenz und Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen auf* $\xi(t) = \partial_{\xi_0}\Phi(t, x_0)$ *an.*

Lösung:

Seien $x_0 \in \Omega$ und $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben und bezeichne mit $x(t) = \Phi(t, x_0)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$x : I \to \Omega, \qquad \dot{x}(t) = v(x(t)), \qquad x(0) = x_0.$$

Die Abbildung

$$\xi : I \to \mathbb{R}^n, \qquad t \mapsto d\Phi_t(x_0)\xi_0$$

ist die Ableitung von $\Phi_t(x) := \Phi(t, x)$ an der Stelle x_0 in Richtung ξ_0:

$$\xi(t) = \partial_{\xi_0}\Phi_t(x_0) = \partial_\lambda \Phi(t, x_0 + \lambda\xi)|_{\lambda=0}$$

Wir müssen im Folgenden sorgfältig argumentieren, da wir a priori nicht wissen, dass diese Funktion in der Zeit differenzierbar ist und $\dot{\xi}$ existiert. Für die Funktion $t \mapsto \Phi(t, x_0 + \lambda\xi_0)$ folgt hingegen aus der Definition des Flusses Φ, dass diese immer in der Zeit differenzierbar ist und es gilt

$$\partial_t\Phi(t, x_0 + \lambda\xi_0) = v(\Phi(t, x_0 + \lambda\xi_0)).$$

Da v nach Vorrausetzung stetig differenzierbar ist, existiert die zweite Ableitung

$$\partial_\lambda\partial_t\Phi(t, x_0 + \lambda\xi_0) = \partial_\lambda \left(v(\Phi(t, x_0 + \lambda\xi_0))\right)$$

und diese ist stetig. Aus dem Satz von Schwarz folgt nun, dass $\partial_\lambda\Phi(t, x_0 + \lambda\xi_0)$ in t stetig differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\partial_t\partial_\lambda\Phi(t, x_0 + \lambda\xi_0) = \partial_\lambda\partial_t\Phi(t, x_0 + \lambda\xi_0) = \partial_\lambda \left(v(\Phi(x_0 + \lambda\xi_0))\right).$$

Für $\lambda = 0$ folgt insbesondere, dass $\xi(t)$ in t stetig differenzierbar ist und es gilt

$$\dot{\xi}(t) = \partial_\lambda v(\Phi(t, x_0 + \lambda\xi_0))|_{\lambda=0} = dv(\Phi(t, x_0)) \circ d\Phi_t(x_0)\xi_0 = dv(x(t))\xi(t).$$