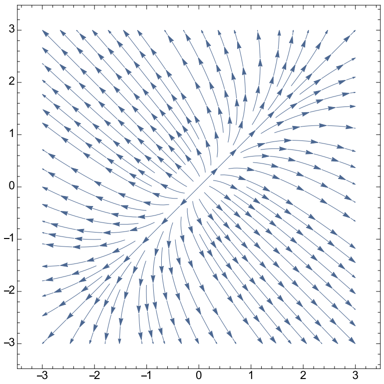
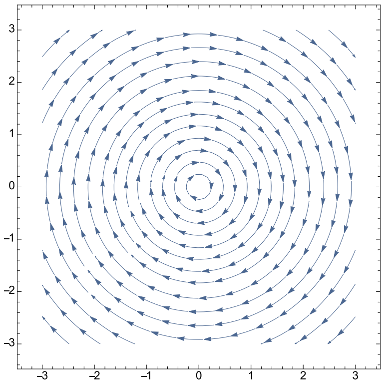
Musterlösung Serie 10

1. **Lösung:**

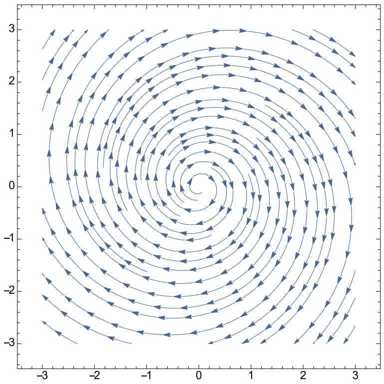
(a) Eigenwerte > 0



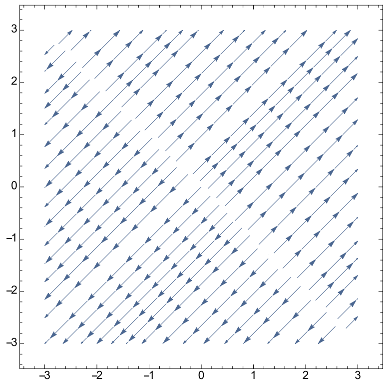
(b) komplexe Eigenwerte mit Realteil 0



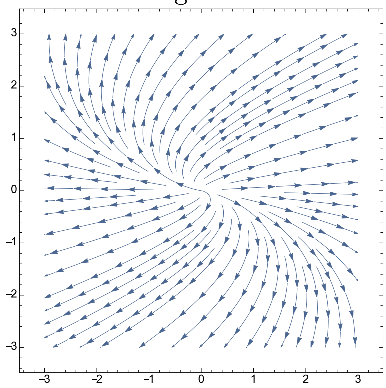
(c) komplexe Eigenwerte mit Realteil > 0



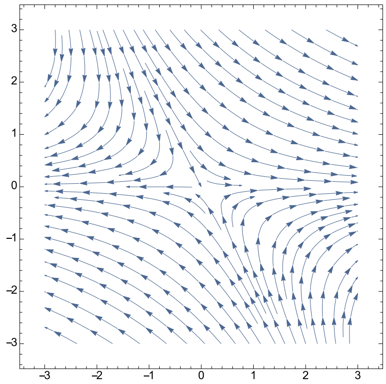
(d) ein Eigenwert > 0, ein Eigenwert 0



(e) doppelter Eigenwert > 0,
aber 1-dim. Eigenraum



(f) ein Eigenwert > 0, ein Eigenwert < 0



2. Berechne alle maximalen Integralkurven von:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-}y \\ x \end{pmatrix} + (1 - x^2 - y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

Gehe dazu wie folgt vor:

(a) Verwende den Ansatz (Polarkoordinaten)

$$x = r(t) \cos \phi(t), \qquad y = r(t) \sin \phi(t)$$

und zeige, dass die Differentialgleichung damit zu

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \qquad \dot{\phi} = 1$$

umgeformt werden kann.

(b) Löse die Gleichung $\dot{r} = r(1 - r^2)$ durch Separation der Variablen (s. Analysis I). Betrachte dazu getrennt die Anfangswerte $r_0 \in \{0, 1\}$; $r_0 \in (0, 1)$; $r_0 \in (1, \infty)$.

(c) Verwende (a) und (b), um die allgemeine Lösung von (1) zu finden.

Lösung:

(a) Einsetzen in (1) liefert die Differentialgleichungen

$$\dot{r} \cos \phi - r \sin \phi \cdot \dot{\phi} = \text{-}r \sin \phi + (1 - r^2) r \cos \phi \,,$$
$$\dot{r} \sin \phi + r \cos \phi \cdot \dot{\phi} = r \cos \phi + (1 - r^2) r \sin \phi \,.$$

Addieren wir einmal die erste Gleichung multipliziert mit $\cos \phi$ zur zweiten multipliziert mit $\sin \phi$ und einmal die erste Gleichung multipliziert mit $\text{-}\sin \phi$ zur zweiten multipliziert mit $\cos \phi$, so erhalten wir

$$\dot{r} = r(1 - r^2) \quad \text{und} \quad \dot{\phi} = 1\,.$$

(b) Für $r_0 \in \{0, 1\}$ erhalten wir konstante Lösungen ($\dot{r} = 0$). Für die weiteren Schritte nehmen wir an, dass $0 \neq r_0 \neq 1$.

Separation der Variablen und Partialbruchzerlegung liefern

$$\int \left(\frac{1}{r} + \frac{\text{-}1/2}{r + 1} + \frac{\text{-}1/2}{r - 1} \right) dr = \int \frac{dr}{r(1 - r^2)} = \int 1 dt \,,$$

also, nach Integration, Multiplikation mit 2 und nach Anwendung der Logarithmusgesetze

$$\ln \left(\frac{r^2}{|r + 1| \cdot |r - 1|} \right) = 2 \ln |r| - \ln |r + 1| - \ln |r - 1| = 2t + c_0 \,.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle (mit $c_1 = e^{c_0} > 0$ und $c_2 = 1/c_1 > 0$):

i. $0 < r < 1$:

$$\ln \left(\frac{r^2}{1 - r^2} \right) = 2t + c_0 \,, \quad \text{also} \quad \frac{r^2}{1 - r^2} = e^{2t} \cdot c_1 \,.$$

Diese quadratische Gleichung besitzt nur eine positive Lösung, nämlich

$$r = \frac{\sqrt{c_1} \cdot e^t}{\sqrt{c_1 \cdot e^{2t} + 1}} = \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t} + c_2}} \,.$$

ii. $r > 1$:

$$\ln \left(\frac{r^2}{r^2 - 1} \right) = 2t + c_0 \,, \quad \text{also} \quad \frac{r^2}{r^2 - 1} = e^{2t} \cdot c_1 \,.$$

Diese quadratische Gleichung besitzt nur die positive Lösung

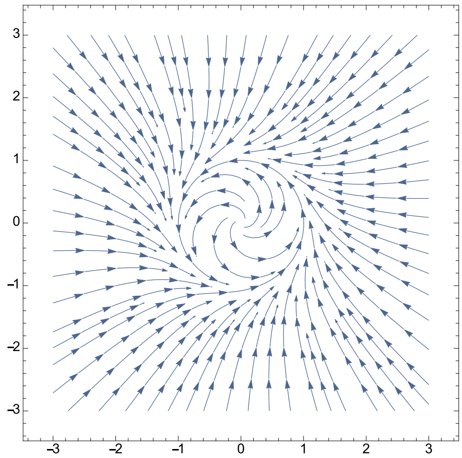
$$r = \frac{\sqrt{c_1} \cdot e^t}{\sqrt{c_1 \cdot e^{2t} - 1}} = \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t} - c_2}} \,.$$

(c) Die drei separat betrachteten Fälle mit $r > 0$ lassen sich zusammenfassen, wenn wir für c_2 einen beliebigen Wert in $\mathbb{R}$ zulassen. Ausserdem erhalten wir $\phi(t) = t + c_3$. Es gilt also

$$x(t) = \frac{e^t \cos(t + c_3)}{\sqrt{e^{2t} + c_2}} \quad \text{und} \quad y(t) = \frac{e^t \sin(t + c_3)}{\sqrt{e^{2t} + c_2}},$$

während der Fall $r = 0$ die konstante Lösung $x(t) = 0 = y(t)$ besitzt.

Phasenportrait:



3. Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens der Masse 1 in einem durch ein (C^2-)Potential $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegebenen Kraftfeld. Die Bahnkurve $x(t)$ des Teilchens erfüllt die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x}(t) = -\operatorname{grad} V(x(t))$$

(a) Überführe die Differentialgleichung in eine Dgl. 1. Ordnung in der in der Vorlesung betrachteten Form

$$\dot{\phi}(t) = v(\phi(t))$$

Was ist hier der Phasenraum?

Hinweis: Führe zusätzliche neue Variablen ein: $p := \dot{x}$.

(b) Zeige, dass die Funktion

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + V(x)$$

konstant entlang aller Integralkurven von v ist.

Bemerkung: Man nennt Funktionen, die konstant entlang der Integralkurven sind, auch erste Integrale. Physikalisch sind dies erhaltene Grössen, z. B. die Energie.

(c) Bestimme für $n = 1$ und $V(x) = \frac{x^2}{2}$ (harmonischer Oszillator) die Integralkurven und zeichne das Phasenportrait. Was geschieht, wenn man stattdessen $V(x) = -\frac{x^2}{2}$ nimmt?

Lösung:

(a) Wir setzen $\phi = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$ und erhalten $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -\operatorname{grad} V(x) \end{pmatrix} =: v(x, p) = v(\phi)$.

(b) Sei nun $(x(t), p(t))$ eine Integralkurve von v, d. h. eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = p$, $\dot{p} = -\operatorname{grad} V(x)$. Dann berechnen wir mittels der Kettenregel

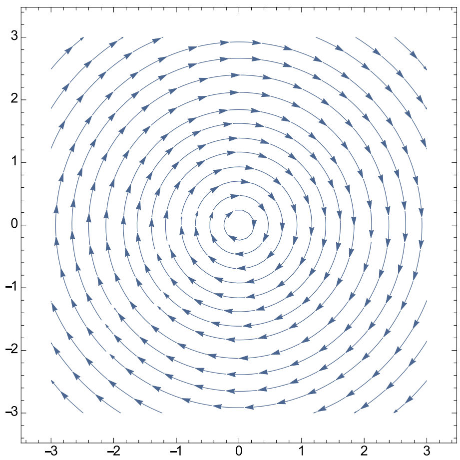
$$\frac{d}{dt} H(x(t), p(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, p)\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial p}(x, p)\dot{p} = \operatorname{grad} V(x) \cdot p + p \cdot (-\operatorname{grad} V) = 0,$$

wobei hier wieder $\cdot$ das Skalarprodukt bezeichnet. Wir folgern, dass H konstant entlang der Integralkurven (Lösungen) ist. Physikalisch ist H die totale Energie (kinetische plus potentielle) des Teilchens.

(c) Die Differentialgleichung wird zu $\dot{x} = p, \dot{p} = -x$. Die Lösungen zum Anfangswert (x_0, p_0) in $t_0 = 0$ sind gerade

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t + p_0 \sin t \\ p_0 \cos t - x_0 \sin t \end{pmatrix}.$$

Dies beschreibt gerade eine Kreisbewegung (im Phasenraum) mit Winkelgeschwindigkeit -1.



Man kann das Phasenportrait hier auch schneller bestimmen, da man aus b) weiss, dass H konstant ist. Die Niveaulinien von H sind aber konzentrische Kreise um den Ursprung. (Man erhält so noch nicht die Umlaufrichtung und die Information, dass die Kreise mit konstanter Winkelgeschwindigkeit durchlaufen werden.)

Würde man stattdessen $V(x) = -\frac{x^2}{2}$ nehmen, so kommt man auf die Lösung

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cosh t + p_0 \sinh t \\ p_0 \cosh t + x_0 \sinh t \end{pmatrix}.$$

Dies beschreibt gerade eine hyperbolische Bahn im Phasenraum. Dies kann man wiederum auch aus b) ablesen, die Niveaulinien von H sind in diesem Fall Hyperbeln. Physikalisch hat man hier ein repulsives Potential. Für positives H hat man nach oben/unten offene Hyperbeln. Die Kurven beschreiben ein Teilchen, das aus dem unendlichen kommend die Potentialbarriere überwindet und in gleicher Richtung fortfliegt. Für negatives H hat man nach links/rechts geöffnete Hyperbeln. Sie beschreiben ein Teilchen, das am Potential reflektiert wird und in die entgegengesetzte Richtung zurückfliegt.

4. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne den Fluss $\Phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(t, x_0, y_0) := (x(t), y(t))$, wobei $(x(t), y(t))$ die Lösung zum Anfangswert $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ bezeichne.

(b) Skizziere das Bild des Quadrates $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 1\}$ unter Φ_1 und Φ_2, wobei $\Phi_t(x, y) := \Phi(t, x, y)$ sei.

(c) Bestimme den Flächeninhalt der Gebiete $\Phi_1(Q)$ und $\Phi_2(Q)$.

Lösung:

(a) Wir berechnen zunächst das Matrixexponential $\exp(tA)$ bezüglich der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hierfür zerlegen wir $A = \mathbb{1} + H$ mit

$$H := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\mathbb{1}$ und H offenbar kommutieren, gilt $\exp(tA) = \exp(t\mathbb{1})\exp(tH)$ gemäss Aufgabe 4. Diese beiden Matrixexponentiale haben wir im wesentlichen bereits in Serie 2 Aufgabe 1 berechnet. Wir geben im folgenden nochmals einen alternativen Ansatz an um $\exp(tH)$ zu bestimmen. Das charakteristische Polynom von H lautet $\lambda^2 + 1$, die Eigenwerte sind $\pm\mathbf{i}$ und die dazugehörigen Eigenräume lauten

$$E(\mathbf{i}) = \ker \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 1 \\ -1 & \mathbf{i} \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E(-\mathbf{i}) = \ker \begin{pmatrix} -\mathbf{i} & 1 \\ 1 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

Wir wählen Eigenvektoren aus $E(\mathbf{i})$ und $E(-\mathbf{i})$ aus und bekommen den Basiswechsel

$$T := \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 1 \\ 1 & \mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

Für diesen gilt $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\mathbf{i}, -\mathbf{i})$ und folglich

$$\begin{aligned}
\exp(tH) &= \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 1 \\ 1 & \mathbf{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\mathbf{i}t} & 0 \\ 0 & e^{-\mathbf{i}t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{i} & -1 \\ -1 & \mathbf{i} \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -e^{\mathbf{i}t} - e^{-\mathbf{i}t} & -\mathbf{i}e^{\mathbf{i}t} + \mathbf{i}e^{-\mathbf{i}t} \\ \mathbf{i}e^{\mathbf{i}t} - \mathbf{i}e^{-\mathbf{i}t} & -e^{\mathbf{i}t} - e^{-\mathbf{i}t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\exp(tA) = \exp(t\mathbb{1})\exp(tH) = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Der Fluss des (linearen) Vektorfeldes

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

ist nun gegeben durch die Abbildung $\phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\phi(t, x, y) = \exp(At)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos(t)x - \sin(t)y \\ \sin(t)x + \cos(t)y \end{pmatrix}.$$

Hierfür verifiziert man leicht, dass

$$\partial_t \phi(t, x, y) \partial_t \exp(At)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\exp(At)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(\phi(t, x, y))$$

gilt (wobei wir die Ableitung $\partial_t \exp(At) = A\exp(At)$ in Aufgabe 4 berechnet haben) und dies ist die definierende Gleichung für den Fluss.

(b) Die Abbildung

$$\phi_t = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

kann geometrisch wie folgt beschrieben werden. Die Matrix beschreibt eine Drehung um den Winkel t im $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung und die Multiplikation beschreibt eine Streckung um den Faktor e^t. Diese bildet Geraden auf Geraden ab und somit ist $\phi_t(Q)$ für jedes t wieder ein Rechteck. Es genügt also die Bildpunkte der Ecken unter ϕ_t zu berechnen um $\phi_t(Q)$ zu beschreiben.

(c) Der Flächeninhalt von Q bleibt unter einer Drehung um der Ursprung invariant und verhält sich quadratisch unter Streckungen. Damit folgt

$$\text{Fläche}(\phi_t(Q)) = e^{2t}\text{Fläche}(Q) = 4e^{2t}.$$

Diese Argumentation können wir erst mit der Theorie über mehrfache Integrale formal rechtfertigen, da wir im Moment noch keine strenge Definition für den Flächeninhalt von Teilmengen in $\mathbb{R}^2$ angeben können. Alternativ kann man mit den Überlegungen in Teil (b) zeigen, dass $\phi_t(Q)$ ein Quadrat in $\mathbb{R}^2$ mit Seitenlänge $2e^t$ ist. Das zeigt ebenfalls, dass $\text{Fläche}(\phi_t(Q)) = 4e^{2t}$ gilt.

5. Im $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax \qquad \text{mit} \qquad A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne alle Lösungen der Differentialgleichung.

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

(b) Welche Lösungen streben für $t \to \infty$ gegen 0? Welche Lösungen streben für $t \to -\infty$ gegen 0?

(c) Skizziere die Lösungen der Differentialgleichung.

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3).$$

Folglich hat A die Eigenwerte -1 und 3 und die dazugehörigen Eigenräume sind gegeben durch

$$\text{Eig(-1)} := \ker(A + \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eig(3)} := \ker(A - 3 \cdot \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir können uns im Gegensatz zu Aufgabe 4 einige Arbeit sparen, da wir nur an der Menge aller Lösungen interessiert sind, und nicht an konkreten Lösungen für gegebene Anfangsbedingungen. Wir behaupten, dass die allgemeine Lösung durch

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist. Zur Begründung, gehen wir zunächst wie in Aufgabe 4 vor. Definiere den Basiswechsel für die Eigenräume durch

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit diesem gilt $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(-1, 3)$ und

$$x(t) = \exp(At)x^0 = T \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} T^{-1}x^0 = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ 3e^{-t} & -e^{3t} \end{pmatrix} T^{-1}x^0$$

ist die Lösung welche in $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ beginnt. Für $y^0 = (y_1^0, y_2^0) := T^{-1}x^0$ erhalten wir

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ 3e^{-t} & -e^{3t} \end{pmatrix} y^0 = y_1^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + y_2^0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Da die Anfangsbedingung $x^0 \in \mathbb{R}^2$ beliebig war, und $T^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine bijektive (lineare) Abbildung ist, variiert also auch y^0 über alle Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Dies liefert die allgemeine Formel welche wir oben benutzt haben.

(b) Die Lösung konvergiert für $t \to \infty$ gegen 0, wenn $c_2 = 0$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Lösung in dem Eigenraum Eig(-1) verläuft. Die Lösung konvergiert für $t \to -\infty$ gegen 0, wenn $c_1 = 0$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Lösung in dem Eigenraum Eig(3) verläuft.

(c) Lösungen die in einem der Eigenräume starten, verbleiben in diesem Eigenraum. Die Lösungen in Eig(-1) konvergieren gegen der Ursprung, während die Lösungen in Eig(3) divergieren und für $t \to -\infty$ gegen den Ursprung konvergieren. Alle anderen Lösungen sind unbeschränkt für $t \to \pm\infty$ und streben exponentiell gegen die Eigenräume.

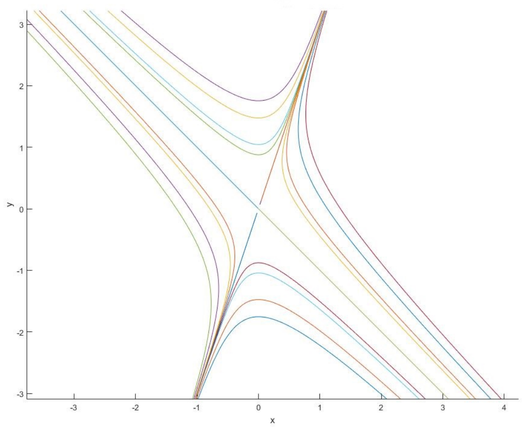


Abbildung 1: Lösungen der Differentialgleichung in Aufgabe 5.