Musterlösung Serie 11

1. Der Schwerpunkt eines messbaren Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$ mit positiven Volumen $\mathrm{vol}(K) > 0$ ist definiert als der Punkt $S := (s_x, s_y, s_z)$ mit den Koordinaten

$$s_x := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K x \, dxdydz \qquad s_y := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K y \, dxdydz, \qquad s_z := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K z \, dxdydz$$

(a) Berechne den Schwerpunkt des Simplex

$$\Delta^3 := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \geq 0 \mid x+y+z \leq 1 \right\}.$$

(b) Berechne den Schwerpunkt der oberen Halbkugel

$$H := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leq 1,\, z \geq 0 \right\}.$$

Lösung:

(a) Wir berechnen das Volumen von Δ^3 mit dem Satz von Fubini als interiertes Integral:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\Delta^3) = \int_{\Delta^3} dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y) \, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2 \, dx = \left[\frac{1}{6}(x-1)^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Wir berechnen als nächstes s_x. Hierfür verwenden wir wiederum Fubini und integrieren zunächst in z- und y-Richtung und zuletzt in x-Richtung:

$$\begin{aligned}
s_x := \frac{1}{\mathrm{vol}(\Delta^3)} \int_{\Delta^3} x \, dxdydz &= 6 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} x \, dz \right) dy \right) dx \\
&= 6 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)x \, dy \right) dx \\
&= 6 \int_0^1 \left[(y(1-x) - \frac{1}{2}y^2)x \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= 3 \int_0^1 (1-x)^2 x \, dx \\
&= \int_0^1 3x - 6x^2 + 3x^3 \, dx \\
&= \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x^3 + \frac{3}{4}x^4 \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{3}{2} - 2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass die Integrale für s_y und s_z auf die gleichen iterierten Integrale führen. Für s_y gilt beispielsweise

$$s_y := \frac{1}{\mathrm{vol}(\Delta^3)} \int_{\Delta^3} y \, dxdydz = 6 \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \left(\int_0^{1-x-y} y \, dz \right) dx \right) dy.$$

Dies ist das gleiche Integral wie oben (wenn wir die Variablen x und y entsprechend umbenennen). Die Rechnung von oben zeigt nun $s_y = \frac{1}{4}$ und analog erhält man auch $s_z = \frac{1}{4}$. Folglich gilt

$$S_{\Delta^3} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right).$$

(b) Wir werden in Aufgabe 3.(f) bereits das Volumen der Kugel berechnen und für die Halbkugel gilt

$$\mathrm{vol}(H) = \frac{2}{3}\pi.$$

Aus Symmetriegründen erwarten wir, dass $s_x = s_y = 0$ gilt. Wir argumentieren hierfür mit dem Satz von Fubini und erhalten

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{3}{2\pi} \int_H x \, dxdydz = \frac{3}{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}} x \, dx \right) dy \right) dz \\ &= \frac{3}{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 0 \, dy \right) dz = \frac{3}{2\pi} \int_0^1 0 \, dz = 0. \end{aligned}$$

Analog berechnet man $s_y = 0$. Für die z Koordinate berechnen wir

$$s_z = \frac{3}{2\pi} \int_H z \, dxdydz = \frac{3}{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}} z \, dx \right) dy \right) dz.$$

Wir könnten die inneren beiden Integrale ähnlich wie in Aufgabe 3.(f) berechnen. Mit dem folgenden geometrischen Argument lässt sich diese Rechnung vermeiden:

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}} z \, dx \right) dy &= z \int_{\{x^2+y^2 \leq 1-z^2\}} 1 \, dxdy \\ &= z \cdot \text{Fläche}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1-z^2\} \\ &= z\pi(1-z^2). \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass das iterierte Integral (bis auf den Faktor z) den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius $r = \sqrt{1-z^2}$ berechnet und dieser durch $\pi r^2 = \pi(1-z^2)$ gegeben ist. Damit folgt

$$s_z = \frac{3}{2} \int_0^1 z(1-z^2) \, dz = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right]_{z=0}^{z=1} = \frac{3}{8}.$$

Der Schwerpunkt der Halbkugel ist somit gegeben durch

$$S_H := \left(0, 0, \frac{3}{8} \right).$$

2. Bestimme das Volumen

(a) der Einheitskreisscheibe $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) des Rotationskörpers

$$R_f := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, \; x^2 + y^2 \leq f(z)^2 \right\}.$$

welcher zu einer stetigen Funktion $f : [a,b] \to [0, \infty)$ gehört.

(c) des Torus

$$T_{r,R} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (\sqrt{x^2+y^2}-R)^2 + z^2 \le r^2\right\}$$

für $r < R$.

(d) des Gebiets $G := \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \le x_3^2 + x_4^2 \le 1\}$ im $\mathbb{R}^4$.

Lösung:

(a) Wir berechnen mit Fubini:

$$\mathrm{vol}_2(K) = \int_K 1\,dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Mit der Substitiution $x = \sin(t)$ erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt.$$

Unter Ausnutzung der Periodizität des Sinus und Kosinus berechnen wir

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2(t) + \sin^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$$

und es folgt $\mathrm{vol}_2(K) = \pi$.

(b) Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine messbare Menge und $\lambda \ge 0$. Dann ist λB ebenfalls messbar und die Formel

$$\mathrm{vol}_2(\lambda B) = \lambda^2 \mathrm{vol}_2(B)$$

gilt. Damit folgt aus Teil (a), dass der Kreis $K_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le r^2\}$ mit Radius r die Fläche πr^2 besitzt. Mit Fubini berechnen wir schliesslich

$$\int_{R_f} 1\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{\{x^2+y^2\le f(z)^2\}} 1\,dx\,dy\right)dz = \int_a^b \mathrm{vol}_2(K_{f(z)})\,dz = \int_a^b \pi f(z)^2\,dz.$$

(c) Mit Fubini gilt

$$\mathrm{vol}_3(T_{R,r}) = \int_{T_{R,r}} dxdydz = \int_{-r}^{r}\int_{\{(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2\le r^2-z^2\}} 1\,dxdy\,dz$$

Die Menge $A_z := \{(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2 \le r^2 - z^2\}$ ist ein Annulus und lässt sich alternativ schreiben als

$$A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (\sqrt{r^2-z^2}-R)^2 \le x^2+y^2 \le (\sqrt{r^2-z^2}+R)^2\}.$$

Die Fläche von A_z ist die Differenz der Fläche von zwei Kreisscheiben und es gilt

$$\mathrm{vol}_2(A_z) = \pi\left((\sqrt{r^2-z^2}+R)^2 - (\sqrt{r^2-z^2}-R)^2\right) = 4\pi R\sqrt{r^2-z^2}.$$

Damit folgt

$$\mathrm{vol}_3(T_{R,r}) = \int_{-r}^{r}\int_{A_z} 1\,dxdy\,dz = \int_{-r}^{r} \mathrm{vol}_2(A_z)\,dz = 4\pi R\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-z^2}\,dz$$

Das letzte Integral berechnet den Flächeninhalt des oberen Halbkreises mit Radius r und es gilt

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-z^2}\,dz = \frac{1}{2}\pi r^2.$$

Dies kann man wie in Teil (a) mit der Substitution $z = r\sin(t)$ explizit berechnen und es folgt $\mathrm{vol}_3(T_{R,r}) = 2\pi^2 R r^2$.

(d) Wir berechnen mit Fubini

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_4(G) &= \int_{\{x_3^2+x_4^2\le 1\}} \left(\int_{\{x_1^2+x_2^1\le x_3^2+x_4^2\}} 1\,dx_1\,dx_2\right) dx_3\,dx_4\\ &= \int_{\{x_3^2+x_4^2\le 1\}} \pi(x_3^2+x_4^2)dx_3\,dx_4\end{aligned}$$

Dieses Integral liesse sich leicht in Polarkoordinaten ausrechnen. Wir berechnen hier das Integral stattdessen direkt mit Fubini:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_4(G) &= \int_{\{x_3^2+x_4^2\le 1\}} \pi(x_3^2+x_4^2)dx_3\,dx_4 = \pi\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x_4^2}}^{\sqrt{1-x_4^2}} x_3^2+x_4^2\,dx_3\,dx_4\\ &= \pi\int_{-1}^{1} \frac{2}{3}(1-x_4^2)^{\frac{3}{2}} + 2(1-x_4^2)^{\frac{1}{2}}x_4^2\,dx_4\end{aligned}$$

Mit der Substitution $x_4 = \sin(t)$ (wie in Teil (a)) erhalten wir dann

$$\mathrm{vol}_4(G) = \frac{2\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)\,dt + 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^2(t)\,dt$$

Wir berechnen das zweite Integral mit Hilfe der Formel $2\cos(t)\sin(t) = \sin(2t)$ und erhalten

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^2(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t)\,dt = \frac{1}{8}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(t)\,dt = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\,dt = \frac{\pi}{8}.$$

Der letzte Schritt folgt aus unserer Rechnung in Teil (a). Für das andere Integral erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)+\sin^4(t)\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t)+\sin^2(t))^2\,dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^2(t)\\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\mathrm{vol}_4(G) = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{3\pi}{8} + 2\pi\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{\pi^2}{2}.$$

3. (a) Berechne das Integral

$$\int_{[0,\pi]^3} \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$$

(b) Sei $A_1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |x|+|y|<1\}$. Berechne das Integral

$$\int_{A_1} x^2\,dx\,dy.$$

(c) Sei $A_2 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, 0\le x\le y\le z\le 1\}$. Berechne das Integral

$$\int_{A_2} xyz\,dx\,dy\,dz.$$

(d) Sei $A_3 := \{(x,y) \,|\, |x|\le|y|\le 1\}$. Berechne das Integral

$$\int_{A_3} e^{y^2}\,dx\,dy.$$

(e) Berechne das Integral
$$\int_{[0,1]^2} \frac{y}{\sqrt{4-x^2y^2}}\,dx\,dy.$$

(f) Definiere $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ durch
$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{für } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{für } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

Berechne das Integral von f.
Bestimme das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

(a) Wir berechnen mit Fubini
$$\begin{aligned}\int_{[0,\pi]^3} \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x+y+z)dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi 2\cos(y+z)\,dy\,dz \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi -4\sin(z)\,dz = -8\end{aligned}$$

(b) Wir wenden Fubini an, wobei wir zunächst in y-Richtung integrieren.
$$\begin{aligned}\int_{A_1} x^2\,dx\,dy &= \int_{-1}^1 \int_{|x|-1}^{1-|x|} x^2\,dy\,dx = \int_{-1}^1 x^2(1-|x|-|x|+1)\,dx \\ &= 2\int_{-1}^1 x^2 - x^2|x|\,dx = 4\int_0^1 x^2 - x^3\,dx = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen mit Fubini
$$\begin{aligned}\int_{A_2} xyz\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \int_0^z \int_0^y xyz\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^1 \int_0^z \frac{1}{2}y^3 z\,dy\,dz = \int_0^1 \frac{1}{8}z^5\,dz = \frac{1}{48}\end{aligned}$$

(d) Wir berechnen mit Fubini
$$\begin{aligned}\int_{A_3} e^{y^2}\,dx\,dy &= \int_{-1}^1 \int_{|y|}^{|y|} e^{y^2}\,dx\,dy = \int_{-1}^1 2|y|e^{y^2}\,dy \\ &= 2\int_0^1 2ye^{y^2}\,dy = 2\ e^{y^2}\Big|_{y=0}^{y=1} = 2(e-1)\end{aligned}$$

(e) Mit Fubini erhalten wir
$$\int_{[0,1]^2} \frac{y}{\sqrt{4-x^2y^2}}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{yx}{2})^2}}\,dx\,dy$$

Das innere Integral berechnen wir mit Hilfe der Substitution $t = \frac{y}{2}x$ sowie der bekannten Formel $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Damit folgt
$$\int_0^1 \frac{y}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{yx}{2})^2}}\,dx = \int_0^{\frac{y}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin\left(\frac{y}{2}\right).$$

Mit partieller Integration erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^2} \frac{y}{\sqrt{4-x^2y^2}}\,dx\,dy &= \int_0^1 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\arcsin y\,dy \\ &= 2y\arcsin(y)\big|_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \\ &= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\,\sqrt{1-y^2}\Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2\end{aligned}$$

(f) Die Funktion f ist offenbar stetig und insbesondere integrierbar. Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\int_{[-1,1]^2} f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx\right)\,dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dx\right)\,dy.$$

Wenn wir das innere Integral berechnen, behandeln wir y als Konstante. Wir bringen den Integranden zunächst in eine Standardform indem wir $\sqrt{1-y^2}$ ausklammern

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2}$$

und anschliessend $u := \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}$ substituieren. Dies liefert

$$\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dx = \int_{-1}^1 (1-y^2)\sqrt{1-u^2}\,du = (1-y^2)\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}\,du.$$

Das verbleibende Integral lässt sich mit der Substitution $u := \sin(t)$ (mit $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$) berechnen:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}\,du &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cdot\cos(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t)+\sin^2(t)\,dt \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Periodizität von $\sin(t)$ und $\cos(t)$ ausgenutzt. Insgesammt erhalten wir also

$$\begin{aligned}\int_{[-1,1]^2} f(x,y)\,dxdy &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dx\right)\,dy \\ &= \int_{-1}^1 (1-y^2)\frac{\pi}{2}\,dy \\ &= \frac{\pi}{2}\left[y-\frac{1}{3}y^3\right]_{y=-1}^{y=1} \\ &= \frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

Das Integral $\int_{[-1,1]^2} f(x,y)\,dxdy$ entspricht dem (orientierten) Volumen, welches unterhalb des Graphen von $f(x,y)$ liegt. Der Körper unterhalb des Graphen ist die Halbkugel

$$H := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0\}$$

und somit liefert das obige Integral das Volumen von H. Etwas formaler kann man dieses Argument mit Fubini präzisieren:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\pi = \int_{[-1,1]^2} f(x,y)\,dxdy &= \int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \\ &= \int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\,dz\right) dxdy \\ &= \int_H 1\,dxdydz =: \mathrm{vol}(H)\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist gerade die Definition des Volumens. Das Volumen der Einheitskugel in somit durch $2\mathrm{vol}(H) = \frac{4}{3}\pi$ gegeben.

4. Kehre in den folgenden Beispielen die Integrationsreihenfolge um:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,dy\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\,dy.$

(c) $\displaystyle\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{4-|z|}}^{\sqrt{4-|z|}}\int_{-\sqrt{4-y^2-|z|}}^{\sqrt{4-y^2-|z|}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$

Lösung:

(a) Der Integrationsbereich ist gegeben durch

$$A_1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leq x\leq 2,\ -x\leq y\leq 2-x^2\}.$$

Insbesondere gilt $-2\leq y\leq 2$ für jedes Element $(x,y)\in A_1$ und für ein festes y gilt $(x,y)\in A_1$ genau dann, wenn $x\leq\sqrt{2-y}$ und $x\geq\max\{-\sqrt{2-y},-y\}$ erfüllt ist. Damit folgt

$$\int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{\max\{-\sqrt{2-y},-y\}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

(b) Der Integrationsbereich ist gegeben durch

$$\begin{aligned}A_2 &:= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq y\leq 2,\ y^3\leq x\leq 4\sqrt{2y}\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\leq x\leq 8,\ \frac{x^2}{32}\leq y\leq\sqrt[3]{x}\right\}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_{0}^{2}\int_{y^2}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{8}\int_{\frac{x^2}{32}}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\,dy\,dx.$$

(c) Der Integrationsbereich ist gegeben durch

$$A_3 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+|z|\leq 4\}.$$

Man kann die Integrationsreihenfolge auf fünf verschiedene Arten verändern. Wir geben im folgenden ein Beispiel an, in dem die Reihenfolge genau umgekehrt wurde:

$$\int_{A_3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-4+x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

5. (a) Sei Q ein abgeschlossener Quader. Zeige, dass $||\mathbb{1}_Q||_1 = v(Q)$, wobei $v(Q)$ das Volumen von Q ist und $||\cdot||_1$ die L^1-Halbnorm.

(b) Zeige, dass für eine Treppenfunktion φ gilt:

$$||\varphi||_1 = \int |\varphi(x)|dx$$

Lösung:

(a) Sei O ein offener Quader mit $Q \subset O$. Dann ist $1 \cdot \mathbb{1}_O$ eine Hüllreihe für $\mathbb{1}_Q$. Somit ist $||\mathbb{1}_A||_1 \leq I(\mathbb{1}_O) = v(O)$. Da zu jedem $\varepsilon > 0$ ein derartiges O so gewählt werden kann, dass auch $v(O) \leq v(Q) + \varepsilon$ gilt, ergibt sich zunächst

$$||\mathbb{1}_Q||_1 \leq v(Q).$$

Umgekehrt gilt für jede Hüllreihe $\Phi = \sum_k c_k \mathbb{1}_{O_k}$ der Funktion $\mathbb{1}_Q$

$$I(\Phi) \geq v(Q), \tag{1}$$

und folglich $||\mathbb{1}_Q||_1 \geq v(Q)$.

Ein Beweis von (1) findet sich in Königsberger Analysis 2, Kapitel 7.2, Lemma 1 (Seiten 240f in Auflage 5).

(b) Da $|\varphi|$ und φ dieselbe L^1-Halbnorm besitzen, nehmen wir für den Beweis $\varphi \geq 0$ an. Wir verwenden die Darstellung

$$\varphi = \sum_{k=1}^{s} c_k \mathbb{1}_{Q_k} + \sum_{i=1}^{r} d_i \mathbb{1}_{R_i}$$

mittel disjunkter Quader, wobei die Q_k offen sind und die R_i das n-dimensionale Volumen 0 haben. Wegen der Dusjunktheit der Q_k und R_i folgt aus $\varphi \geq 0$, dass alle c_k und d_i nicht negativ sind.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu jedem Quader R_i sei R_i^* ein offener Quader mit $R_i \subset R_i^*$ und $v(R_i^*) \leq \varepsilon$. Dann ist $\Phi := \sum_1^s c_k \mathbb{1}_{Q_k} + \sum_1^r d_i \mathbb{1}_{R_i^*}$ eine Hüllreihe zu φ. Mit ihr ergibt sich

$$||\varphi||_1 \leq \sum_1^s c_k v(Q_k) + \varepsilon \cdot \sum_1^r d_i,$$

woraus folgt

$$||\varphi||_1 \leq \sum_1^s c_k v(Q_k) + \int \varphi dx \tag{2}$$

Sei anderseits A ein abgeschlossener Quader so, dass $\varphi(x) = 0$ für $x \notin A$; sei ferner m das Maximum von φ. Dann ist die Treppenfunktion $\varphi := m \cdot \mathbb{1}_A - \varphi$ nicht negativ und auch für sie gitl $||\psi||_1 \leq \int \psi dx$. Hieraus und mit Teil (a) folgt

$$\int \varphi dx = \int (m \cdot \mathbb{1}_A - \varphi)dx \leq ||\varphi + \psi||_1 - ||\psi||_1 \leq ||\varphi||_1 .$$

Zusammen mit (2) ergibt das die Behauptung.

Abgabe: in der Woche vom 14. Mai 2018, in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 28