Musterlösung Serie 12

1. **Hinweis:** *Die folgende Aufgabe ist eine alte Prüfungsaufgabe.*

   Bestimme das Volumen des Körpers

$$\Omega = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq 1\big\} \ .$$

Lösung:

Hinweis: *Die angegebenen Punkte stammen aus dem Korrekturschema der entsprechenden Prüfung.*

Es gilt

$$V(\Omega) = \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \int_0^{(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} 1 \, dz\, dy\, dx$$

[*1 Punkt pro Grenze: 1+1+1=3*]

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} (1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \Big((1-\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{y}(1-\sqrt{x}) + y\Big) \, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \Big((1-\sqrt{x})^2 y - \frac{4}{3} y^{3/2}(1-\sqrt{x}) + \frac{1}{2}y^2\Big)\Big|_{y=0}^{(1-\sqrt{x})^2} dx \end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_0^1 \Big((1-\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})^2 - \frac{4}{3}(1-\sqrt{x})^3(1-\sqrt{x}) + \frac{1}{2}(1-\sqrt{x})^4\Big) \, dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-\sqrt{x})^4 \, dx \end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \frac{1}{6}\int_0^1 (1 - 4\sqrt{x} + 6x - 4x^{3/2} + x^2) \, dx \\ &= \frac{1}{6}\Big(1 - \frac{8}{3} + 3 - \frac{8}{5} + \frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{90}. \end{aligned}$$

[*2 Punkte*]

2. (a) Zeige, dass die Funktion $(x+y)^{-a}$ über den 2-dimensionalsen Standardsimplex Δ^2 genau für $a<2$ intergrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\Delta^2} \frac{1}{(x+y)^a}\,dxdy = \frac{1}{2-a}$$

(b) Zeige, dass die Funktion $(x+y)^{-a}$ genau für $a>2$ über den Aussenraum $\mathbb{R}^2_+\backslash\Delta^2$ integriertbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2_+\backslash\Delta^2} \frac{1}{(x+y)^a}\,dxdy = \frac{1}{a-2}$$

Hinweis: *Verwende die Jacobi-Transformation* $(x,y) = J(u,v) := (u(1-v), uv)$.

Lösung:

Wir betrachten die Jacobi-Transformation. Für $s,t\in\mathbb{R}$ mit $0\le s<t$ betrachte die Menge

$$\Delta^2_{[s,t]} := \{(x,y)\in[0,\infty)^2 \mid s\le x+y\le t\} \subset \mathbb{R}^2_+.$$

Dann ist die Jacobi-Transformation durch den Diffeomorphismus

$$J:[s,t]\times[0,1]\to\Delta^2_{[s,t]},\qquad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} := J\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}u(1-v)\\uv\end{pmatrix}$$

gegeben. Zusätzlich gilt

$$|\det(dJ(u,v))| = \left|\det\begin{pmatrix}(1-v) & -u\\ v & u\end{pmatrix}\right| = u.$$

(a) Mit der Notation von oben gilt $\Delta^2 = \Delta^2_{[0,1]}$. Die Jacobi-Transformation liefert nun zusammen mit dem Transformationssatz

$$\int_{\Delta^2} \frac{1}{(x+y)^a}\,dxdy = \int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{u^a}\,u\,dudv = \int_0^1 u^{1-a}\,du = \frac{1}{2-a}.$$

Das letzte Integral existert genau dann, wenn $1-a>-1$ gilt. Das liefert die Bedingung $a<2$ aus der Aufgabenstellung.

(b) Mit der Notation von oben gilt $\mathbb{R}^2_+\backslash\Delta^2 = \Delta^2_{[1,\infty]}$. Streng genommen, ist das Integral über diesen Bereich definiert als der Grenzwert der Integrale über die kompakten Teilmengen $\Delta^2_{[1,t]}$ mit $t\to\infty$ und wir werden das im Folgenden etwas pedantisch berücksichtigen. Die Jacobi-Transformation liefert dann zusammen mit dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2_+\backslash\Delta^2} \frac{1}{(x+y)^a}\,dxdy &= \lim_{t\to\infty}\int_{\Delta_{[1,t]}} \frac{1}{(x+y)^a}\,dxdy = \lim_{t\to\infty}\int_{[1,t]\times[0,1]} \frac{1}{u^a}\,u\,dudv\\ &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t u^{1-a}\,du = \int_1^\infty u^{1-a}\,du = \frac{1}{a-2}\end{aligned}$$

Das letzte Integral existiert genau dann, wenn $1-a<-1$ gilt, und das liefert die Bedingung $a>2$.

3. Es sei $K\subset\mathbb{R}^3$ der Durchschnitt der beiden Zylinder

$$Z_1 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1\} \text{ und } Z_2 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2\le 1\}.$$

Berechne das Volumen von K.

Lösung:

Das gesuchte Volumen ist

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dz \\
&= \int_{-1}^{1} dy \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \right)^2 \\
&= \int_{-1}^{1} 4(1-y^2) dy = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.
\end{aligned}
$$

Oder aufwendiger:

$$
V = \int_{-1}^{1} dz \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \int_{-1}^{1} dz \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy 2\sqrt{1-y^2}.
$$

Das y-Integral berechnen wir mit der Substitution $y = \sin(t)$:

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{1-y^2} dy &= \int_{\arcsin(-a)}^{\arcsin(a)} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2}(t + \sin(t)\cos(t)) \Big|_{\arcsin(-a)}^{\arcsin(a)} \\
&= \arcsin(a) + a\sqrt{1-a^2}
\end{aligned}
$$

mit $a = \sqrt{1-z^2}$. Jetzt benutzen wir $\arcsin(\sqrt{1-z^2}) = \arccos(|z|)$. Das Volumen ist damit auf folgendes Integral reduziert:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_{-1}^{1} (\arccos(|z|) + |z|\sqrt{1-z^2}) dz = 4\int_{0}^{1} (\arccos(z) + z\sqrt{1-z^2}) dz \\
&= 4\left(z\arccos(z) - \sqrt{1-z^2} - \frac{1}{3}(1-z^2)^{3/2} \right)\Big|_0^1 = \frac{16}{3}.
\end{aligned}
$$

Die Stammfunktion zu arccos erhält man z.B. durch partielle Integration (schreibe $\arccos = 1 \cdot \arccos$).

4. Es bezeichne

$$
\Delta^n := \{x \in [0,1]^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1\}
$$

das n-dimensionale Standardsimplex.

(a) Berechne das Volumen von Δ^n.

(b) Berechne das Integral $\displaystyle\int_{\Delta^n} e^{x_1+x_2+\cdots+x_n}\, dx_1 \cdots dx_n$.

Hinweis: *Betrachte die Substitution* $y_k = x_1 + \cdots + x_k$ *für* $k = 1, \ldots, n$.

(c) Das Simplex im $\mathbb{R}^n$ mit den Eckpunkten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$
D := \left\{ \sum_{k=1}^{n} t_k(a_k - a_0) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (t_1, \ldots, t_n) \in \Delta^n \right\}.
$$

Zeige:

$$
\mathrm{vol}_n(D) = \frac{1}{n!} \left|\det(a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0)\right|.
$$

Lösung:

Definiere die Menge

$$D_n := \{(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \le y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n \le 1\}$$

und betrachte den (linearen) Diffeomorphismus

$$\phi : \Delta^n \to D_n, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_n \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung von ϕ ist gegeben durch die Dreiecksmatrix

$$d\phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt $|\det(d\phi(x))| = 1$ sowie $|\det(d\phi^{-1}(y))| = 1$.

(a) Mit der Substitution von oben und dem Transformationssatz erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_n(\Delta^n) &:= \int_{\Delta_n} 1\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{D_n} 1\, dy_1 \cdots dy_n \\ &= \int_0^1 \int_0^{y_n} \int_0^{y_{n-1}} \cdots \int_0^{y_2} dy_1 \cdots dy_n \end{aligned}$$

Um das letzte iterierte Integral zu berechnen verifiziert man leicht mit vollständiger Induktion über $k = 2, \dots, n$ die Formel

$$\int_0^{y_k} \int_0^{y_{n-1}} \cdots \int_0^{y_2} dy_1 \cdots dy_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} y_k^{k-1}$$

und erhält schliesslich mit $k = n$

$$\mathrm{vol}_n(\Delta^n) = \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!} y_n^{n-1}\, dy_n = \frac{1}{n!}$$

(b) Mit der Substitution von oben und dem Transformationssatz erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^n} e^{x_1 + \cdots + x_n}\, dx_1 \cdots dx_n &= \int_{D_n} e^{y_n} dy_1 \cdots dy_n \\ &= \int_0^1 e^{y_n} \left(\int_0^{y_n} \cdots \int_0^{y_2} dy_1 \cdots dy_{n-1} \right) dy_n \\ &= \int_0^1 e^{y_n} \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!}\, dy_n \end{aligned}$$

Dieses Integral berechnet man durch $(n-1)$-fache partielle Integration. Wir kürzen hierfür den Wert des letzte Integrals mit I_n ab. Partielle Integration liefert die Rekursion

$$I_n = \int_0^1 e^t \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, dt = \frac{e}{(n-1)!} - \int_0^1 e^t \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\, dt = \frac{e}{(n-1)!} - I_{n-1}.$$

Für $n = 1$ berechnen wir

$$I_1 := \int_0^1 e^t\, dt = e - 1$$

und erhalten

$$\int_{\Delta^n} e^{x_1 + \cdots + x_n}\, dx_1 \cdots dx_n = I_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{e}{(n-k)!} \right) + (-1)^{n-1}(e-1).$$

(c) Wir bezeichnen mit $D \subset \mathbb{R}^n$ das Simplex mit den Eckpunkten $a_0, \ldots, a_n$ und betrachten die Substitution

$$\phi : \Delta^n \to D, \qquad x = \phi(t) = \sum_{k=1}^{n} t_k(a_k - a_0).$$

Beachte, dass in dieser Formel $t = (t_1, \ldots, t_n)$ gilt und somit $t_k \in \mathbb{R}$ Skalare sind, während die $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ Punkte im $\mathbb{R}^n$ sind. Die Ableitung von ϕ an der Stelle t ist gegeben durch

$$d\phi(t) = (a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0).$$

Das heisst, die i-te Spalte der Jacobi Matrix ist durch den Vektor $a_i - a_0$ gegeben. Man sieht leicht mit den Methoden der linearen Algebra, dass das Simplex D genau dann entartet ist, d. h. D in einer $(n-1)$-dimensionalen affinen Ebene enthalten ist, falls die Matrix $d\phi(t)$ singulär ist. In diesem Fall ist die Gleichung

$$\mathrm{vol}_n(D) = 0 = \frac{1}{n!} \left|\det(a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0)\right|$$

trivialerweise erfüllt. Andernfalls ist ϕ ein Diffeomorphismus und der Transformationssatz liefert

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n(D) &= \int_D 1\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\Delta_n} |\det(d\phi(t))|\, dt_1 \cdots dt_n \\
&= \int_{\Delta^n} |\det(a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0)|\ dt_1 \cdots dt_n \\
&= \frac{1}{n!} \left|\det(a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0)\right|.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Formel $\mathrm{vol}_n(\Delta_n) = \frac{1}{n!}$ verwendet.

5. (a) Bestimme das zwischen der Kugel $x^2+y^2+z^2 = 8$ und dem Paraboloid $4z = x^2+y^2+4$ eingeschlossene Volumen.
Hinweis: Verwende Zylinderkoordinaten.

(b) Sei B der Bereich im ersten Quadranten des $\mathbb{R}^2$ begrenzt durch die Kurven

$$xy = 1,\ xy = 3,\ x^2 - y^2 = 1,\ x^2 - y^2 = 4.$$

Berechne $\int_B (x^2 + y^2)\, dx\, dy$.
Hinweis: Substituiere $u = xy$ und $v = x^2 - y^2$.

Lösung:

(a) Mit $\rho^2 = x^2 + y^2$ lauten die Gleichungen der Grenzen:

$$\begin{aligned}
\rho^2 + z^2 &= 8 \\
z &= \frac{1}{4}\rho^2 + 1.
\end{aligned}$$

Bei $z = 2$ durchdringen sich die Kugel und das Paraboloid. Das Volumen setzt sich also zusammen aus dem Teil vom Paraboloid bis $z = 2$ und dem Teil der Kugel von $z = 2$ bis $z = \sqrt{8}$:

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^2 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\sqrt{z-1}} \rho d\rho + \int_2^{\sqrt{8}} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{8-z^2}} \rho d\rho \\
&= \int_1^2 dz 2\pi \cdot 2(z-1) + \int_2^{\sqrt{8}} dz 2\pi \cdot \frac{1}{2}(8 - z^2) \\
&= 2\pi(z^2 - 2z)\Big|_1^2 + \pi(8z - \frac{1}{3}z^3)\Big|_2^{\sqrt{8}} = 2\pi + \pi(\frac{2}{3}8\sqrt{8} - \frac{40}{3}) \\
&= \frac{\pi}{3}(32\sqrt{2} - 34)
\end{aligned}$$

(b) Die Jacobi-Determinante der Abbildung $\binom{u}{v}(x, y)$ ist

$$\det \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{bmatrix} = -2(x^2 + y^2).$$

Also gilt

$$\int_B (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int_1^3 du \int_1^4 dv = 3.$$