Musterlösung Serie 13

Hinweis: *Nur die ersten vier Aufgaben sind relevant für den Bonus.*

1. Sei $r : [a,b] \to (0,\infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion.

   (a) Finde Formeln für das 1-dimensionale Volumen und den Schwerpunkt $S = (S_z, S_r)$ des Graphen
   $$\Gamma := \{(z, r(z)) \mid z \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

   (b) Zeige, dass der Flächeninhalt der Rotationsfläche
   $$R_\Gamma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le z \le b,\ x^2 + y^2 = r(z)^2\}$$
   durch die *zweite Guldinsche Regel* gegeben ist:
   $$\mathrm{vol}_2(M) = 2\pi S_r \cdot \mathrm{vol}_1(\Gamma).$$

Lösung:

(a) Wir parametrisieren Γ durch die Kurve
$$\gamma : [a,b] \to \Gamma, \qquad \gamma(t) := (t, r(t)).$$
Für diese Parametrisierung gilt
$$\sqrt{\det(d\gamma^t(t) d\gamma(t))} = ||\dot\gamma(t)|| = \sqrt{1 + \dot r^2(t)}$$
und somit ist das 1-dimensionale Volumen von Γ gegeben durch
$$\mathrm{vol}_1(\Gamma) = \int_\Gamma 1\, ds = \int_a^b \sqrt{1 + \dot r^2(t)}\, dt$$
Der Schwerpunkt $S = (S_z, S_r)$ von Γ ist definiert durch
$$S_z := \frac{1}{\mathrm{vol}_1(\Gamma)} \int_\Gamma z\, ds, \qquad S_r := \frac{1}{\mathrm{vol}_1(\Gamma)} \int_\Gamma r\, ds$$
Mit der Parametrisierung γ können wir diese Integrale wie folgt berechnen:
$$S_z = \frac{1}{\mathrm{vol}_1(\Gamma)} \int_\Gamma z\, ds = \frac{1}{\mathrm{vol}_1(\Gamma)} \int_a^b t\sqrt{1 + \dot r^2(t)}\, dt$$
$$S_r = \frac{1}{\mathrm{vol}_1(\Gamma)} \int_\Gamma r\, ds = \frac{1}{\mathrm{vol}_1(\Gamma)} \int_a^b r(t)\sqrt{1 + \dot r^2(t)}\, dt$$

(b) Wir parametrisieren die Rotationsfläche mit
$$\psi : [a,b] \times [0, 2\pi] \to R_\Gamma, \qquad \psi(t,\phi) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(\phi) \\ r(t)\sin(\phi) \\ t \end{pmatrix}.$$

Die Jacobimatrix von ψ ist gegeben durch

$$d\psi(t,\phi) = \begin{pmatrix} \dot{r}(t)\cos(\phi) & -r(t)\sin(\phi) \\ \dot{r}(t)\sin(\phi) & r(t)\cos(\phi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir

$$d\psi^t(t,\phi)d\psi(t,\phi) = \begin{pmatrix} \dot{r}^2(t)+1 & 0 \\ 0 & r^2(t) \end{pmatrix}.$$

Dies liefert für das Flächenelement bezüglich ψ

$$\sqrt{\det(d\psi^t(t,\phi)d\psi(t,\phi))} = r(t)\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}$$

Damit erhalten wir für den Flächeninhalt der Rotationsfläche R_Γ

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(R_\Gamma) &= \int_{R_\Gamma} 1\,dS = \int_a^b \int_0^{2\pi} r(t)\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}\,dt \\ &= 2\pi \int_a^b r(t)\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}\,dt \\ &= 2\pi \mathrm{vol}_1(\Gamma) S_r. \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der letzen Gleichung die Formel aus Teil (a) für die r-Koordinate des Schwerpunktes $S=(S_z,S_r)$ benutzt.

2. Für $R>a>0$ betrachten wir den Torus

$$T_{R,a} := \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2 + z^2 = a^2 \right\}.$$

(a) Zeige, dass $T_{R,a}$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Berechne die Fläche des Torus $v_2(T_{R,a})$.

Lösung:

(a) Es gilt $T_{R,a} = f^{-1}(a^2)$ für die Funktion

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2 + z^2.$$

Wir behaupten, dass a^2 ein regulärer Wert von f ist. Dann garantiert der Satz vom regulären Wert, dass $T_{R,a}$ in der Tat eine Untermannigfaltigkeit ist. Nach Annahme gilt $f(0,0,z) = R^2+z^2 \geq R^2 > a^2$ und folglich schneidet $T_{R,a}$ nicht die z-Achse. Im Komplement der z-Achse ist f stetig differenzierbar und es gilt

$$df(x,y,z) = \left(\frac{2x(\sqrt{x^2+y^2}-R)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y(\sqrt{x^2+y^2}-R)}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z \right).$$

Falls $z\neq 0$ gilt, folgt direkt $df(x,y,z)\neq 0$ und die Ableitung ist surjektiv. Falls $z=0$ und $f(x,y,0)=a^2$ gilt, folgt $|\sqrt{x^2+y^2}-R| = a \neq 0$ und entweder $x\neq 0$ oder $y\neq 0$ ist erfüllt. Es folgt dann ebenfalls $df(x,y,z)\neq 0$ und die Ableitung ist wiederum surjektiv.

(b) Betrachte die Parametrisierung

$$\psi:[0,2\pi]\times[0,2\pi]\to T_{R,a}, \qquad \psi(\alpha,\beta) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha)(R+a\cos(\beta)) \\ \sin(\alpha)(R+a\cos(\beta)) \\ a\sin(\beta) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$d\psi(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha)\,(R + a\cos(\beta)) & -a\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha)\,(R + a\cos(\beta)) & -a\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ 0 & a\cos(\beta) \end{pmatrix}$$

und

$$d\psi(\alpha,\beta)^T d\psi(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} (R + a\cos(\beta))^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\sqrt{\det(d\psi(\alpha,\beta)^T d\psi(\alpha,\beta))} = (R + a\cos(\beta))a.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(T_{R,a}) &= \int_{T_{R,a}} 1\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (R + a\cos(\beta))a\, d\alpha d\beta \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} Ra + a^2\cos(\beta)\, d\beta = 4\pi^2 Ra. \end{aligned}$$

3. Betrachte die Sphäre $S_r^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^3$. Belegt man diese gleichmässig mit einer Masse konstanter Dichte $\rho > 0$, so ist das resultierende Gravitationspotential im Punkt $p \in \mathbb{R}^3 \backslash S_r^2$ gegeben durch

$$V(p) := \int_{S_r^2} \frac{\rho}{||x - p||}\, dS(x).$$

Zeige, dass $V(p) = 4\pi r\rho$ für alle p im Inneren der Sphäre gilt. Insbesondere ist V im Inneren der Sphäre konstant und übt dort keine Gravitationskraft aus.

Hinweis: *Aus Symmetriegründen kannst Du $p = (0,0,a)$ mit $|a| < r$ annehmen. Dann gilt in Kugelkoordinaten $||x - p|| = \sqrt{r^2 - 2ra\cos(\theta) + a^2}$ und das Oberflächenintegral lässt sich in diesen Koordinaten explizit berechnen.*

Lösung:

Wir parametrisieren die Sphäre S_r^2 mit Kugelkoordinaten

$$\psi : [0,2\pi] \times [0,\pi] \to S_r^2, \qquad \psi(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi)\sin(\theta) \\ r\sin(\phi)\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Wir berechnen als nächstes das dazugehörige Flächenelement: Die Jacobimatrix von ψ ist gegeben durch

$$d\psi(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} -r\sin(\phi)\sin(\theta) & r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ r\cos(\phi)\sin(\theta) & r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & -r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$d\psi(\phi,\theta)^t d\psi(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} r^2\sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\sqrt{\det(d\psi(\phi,\theta)^t d\psi(\phi,\theta))} = r^2\sin(\theta).$$

Als nächstes müssen wir den Integranten in Kugelkoordinaten angeben können. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass $p = (0,0,a)$ auf der z-Achse liegt mit $|a| < r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ||\psi(\phi,\theta) - a||^2 &= r^2\cos^2(\phi)\sin^2(\phi) + r^2\sin^2(\phi)\sin^2(\theta) + (r\cos(\theta) - a)^2 \\ &= r^2\sin^2(\theta) + r^2\cos^2(\theta) - 2ra\cos(\theta) + a^2 \\ &= r^2 - 2ra\cos(\theta) + a^2 \end{aligned}$$

Damit können wir schliesslich das Gravitationspotential von p berechnen und erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_{S_r^2} \frac{\rho}{||x-p||} dS(x) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - 2ra\cos(\theta) + a^2}} r^2 \sin(\theta)\, d\theta d\phi \\
&= 2\pi\rho r^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{r^2 - 2ra\cos(\theta) + a^2}}\, d\theta \\
&= 2\pi\rho r^2 \left[\frac{1}{ra} \sqrt{r^2 - 2ra\cos(\theta) + a^2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
&= 2\pi\rho r^2 \left[(r+a) - (r-a) \right] \\
&= 4\pi\rho r^2.
\end{aligned}$$

4. Zu von 0 verschiedenen reellen Zahlen $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}^*$ definiere $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $x \mapsto (x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n)$. Zeige:

   (a) Ist f über $\mathbb{R}^n$ integrierbar, dann auch $f \circ S$, und es gilt

   $$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1}{s_1}, \ldots, \frac{x_n}{s_n}\right) d^n x = |s_1 \cdot \ldots \cdot s_n| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d^n x\,.$$

   (b) Mit $A \subset \mathbb{R}^n$ ist auch $S^{-1}(A)$ messbar und hat das Volumen

   $$v(S^{-1}(A)) = |s_1 \cdot \ldots \cdot s_n| \cdot v(A)\,.$$

   Man berechne damit das Volumen eines Ellipsoids im $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

(a) Bei S handelt es sich um eine (sogar lineare) Transformation, wir können also den Transformationssatz anwenden. Da S surjektiv ist, gilt ausserdem $S(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1}{s_1}, \ldots, \frac{x_n}{s_n}\right) d^n x &= \int_{S(\mathbb{R}^n)} f(S(x))\, d^n x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left|\det(DS^{-1}(x))\right| d^n x = |s_1 \cdot \ldots \cdot s_n| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d^n x\,.
\end{aligned}$$

(b) Die zu zeigende Aussage folgt, wenn wir entweder $f = \mathbb{1}_A$ setzen oder . Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ die Längen der Halbachsen des Ellipsoids, dann ist dessen Volumen also $a \cdot b \cdot c \cdot \frac{3}{4}\pi$.

5. Berechne den Fluss des Vektorfeldes

   $$K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ K(x,y,z) := (0, 0, 1-z)$$

   von unten nach oben durch die obere Hälfte der Einheitssphäre

   $$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

   (a) als Flussintegral $\int_H \langle K, \nu \rangle dS$,

   (b) mit Hilfe des Satzes von Gauss. **Hinweis:** *Finde ein dreidimensionales Gebiet Ω, dessen Rand H enthält und so, dass der Fluss durch den restlichen Rand $\partial\Omega \setminus H$ einfach zu berechnen ist.*

Lösung:

(a) Wir parametrisieren H als Graph über der Einheitskreisschreibe:

$$\psi\colon \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,|\, u^2+v^2\le 1\}\to H, \qquad \psi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \qquad w := \sqrt{1-u^2-v^2}$$

Das dazugehörige Flächenelement ist definiert durch

$$dS = \sqrt{\det\left(d\psi(u,v)^t d\psi(u,v)\right)}\, du\, dv$$

Dies können wir alternativ schreiben als

$$dS = ||\partial_u\psi(u,v)\times\partial_v\psi(u,v)||\, du\, dv$$

In unserem Fall gilt

$$\partial_u\psi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \text{-}u/w \end{pmatrix}, \qquad \partial_v\psi(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \text{-}v/w \end{pmatrix}$$

sowie

$$\partial_u\psi(u,v)\times\partial_v\psi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \text{-}u/w \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \text{-}v/w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u/w \\ v/w \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt liefert ein Normalenvektorfeld auf H. Da es in die gleiche Richtung wie ν zeigt, folgt

$$\nu(\psi(u,v)) = \frac{\partial_u\psi(u,v)\times\partial_v\psi(u,v)}{||\partial_u\psi(u,v)\times\partial_v\psi(u,v)||}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\int_H \langle K,\nu\rangle\, dS &= \int_{\{u^2+v^2\le 1\}} \langle \operatorname{rot}(f)(\psi(u,v)), \partial_u\psi(u,v)\times\partial_v\psi(u,v)\rangle\, du\, dv \\
&= \int_{\{u^2+v^2\le 1\}} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u/w \\ v/w \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle du\, dv \\
&= \int_{\{u^2+v^2\le 1\}} (1-w)\, du\, dv = \int_{\{u^2+v^2\le 1\}} \left(1-\sqrt{1-u^2-v^2}\right) du\, dv \\
&= \operatorname{vol}_2(\{u^2+v^2\le 1\}) - \int_{\{u^2+v^2\le 1\}} \sqrt{1-u^2-v^2}\, du\, dv \\
&= \pi - \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r\, dr\, d\phi \\
&= \pi - 2\pi\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{3}\pi
\end{aligned}$$

(b) Wir wählen die obere Hälfte des Einheitsballs

$$\Omega := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\},$$

und berechnen $\operatorname{div} K = \text{-}1$. Dann ist $\partial\Omega\setminus H$ die Scheibe $D^2 := \{x^2+y^2\le 1,\ z=0\}$, auf der $\nu = (0,0,\text{-}1)$.
Somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_H \langle K,\nu\rangle\, dS &= \int_\Omega \operatorname{div} K\, dx\, dy\, dz - \int_{D^2}\langle K,\nu\rangle\, dS \\
&= \int_\Omega \text{-}1 dx\, dy\, dz - \int_{D^2} (z-1)\, dx\, dy \\
&= -\operatorname{vol}_3(\Omega) + \operatorname{vol}_2(D^2) \\
&= -\frac{2}{3}\pi + \pi = \frac{1}{3}\pi
\end{aligned}$$

6. **Hinweis:** *Die folgende Aufgabe stammt aus der Prüfung Analysis I–II für D–CHAB, D–MATH, D–PHYS, Herbst 2004.*

Es seien $a, b, c > 0$ feste Zahlen und

$$V := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq z \leq c \right\}.$$

(a) Skizziere V und berechne

$$\mathcal{I} := \int_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz\,.$$

(b) Berechne den Fluss

$$\Phi := \int_{\partial V} \langle K, \nu \rangle\, d\omega \quad \text{für} \quad K(x, y, z) := (-x^2 yz,\, xy^2 z,\, z^2)\,.$$

Dabei ist ∂V so orientiert, dass ν von innen nach aussen bezüglich V weist.

Lösung:

a) [4P]

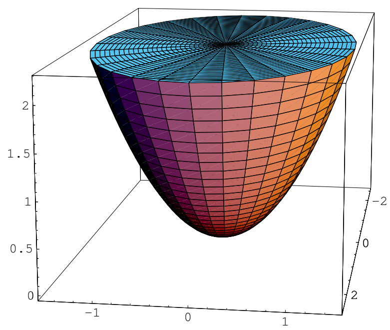

Abbildung 1: Die Menge V ist ein massives Paraboloid mit ellipsoidischem Querschnitt. (1 Punkt)

Sei

$$a\widetilde{x} := x \quad \text{und} \quad b\widetilde{y} := y\,,$$

was auf den Integrationsbereich

$$\widetilde{V} = \left\{ (\widetilde{x}, \widetilde{y}, z) \mid \widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 \leq z \leq c \right\}$$

führt. Wir benutzen nun Zylinderkoordinaten (ϱ, ϕ, z) mit

$$\varrho^2 = \widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2\,, \quad \widetilde{x} = \varrho \cos\phi\,, \quad \widetilde{y} = \varrho \sin\phi\,.$$

Aus

$$dx\, dy\, dz = ab\, d\widetilde{x}\, d\widetilde{y}\, dz = ab\varrho\, d\varrho\, d\phi\, dz$$

sowie $\varrho \leq \sqrt{z}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \int_{\widetilde{V}} (a^2 \widetilde{x}^2 + b^2 \widetilde{y}^2)\, d\widetilde{x}\, d\widetilde{y}\, dz \\
&= \int_{z=0}^{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\varrho=0}^{\sqrt{z}} (a^2 \varrho^2 \cos^2\phi + b^2 \varrho^2 \sin^2\phi)\, ab\varrho\, d\varrho\, d\phi\, dz \\
&= ab \cdot \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2\phi + b^2 \sin^2\phi)\, d\phi \cdot \int_{z=0}^{c} \int_{\varrho=0}^{\sqrt{z}} \varrho^3\, d\varrho\, dz \qquad \text{(3P)} \\
&= ab \cdot (a^2 \pi + b^2 \pi) \cdot \int_0^c \frac{z^2}{4}\, dz = \boxed{\frac{\pi}{12} ab(a^2 + b^2) c^3}
\end{aligned}$$

[*Anmerkung:*

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, d\phi = \pi$$

kann ohne Weiteres verwendet werden; Herleitung ist einfach mittels part. Integration.]

b) [4P] Aus dem Satz von Gauss ergibt sich

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{\partial V} \langle K, \nu\rangle\, d\omega = \int_V \operatorname{div} K\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_V (-2xyz + 2xyz + 2z)\, dx\, dy\, dz = \int_V 2z\, dx\, dy\, dz\,.\end{aligned} \tag{1}$$

In einer ähnlichen Rechnung zu **a)** erhalten wir

$$\Phi = ab \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_{z=0}^{c} \int_{\varrho=0}^{\sqrt{z}} 2z\varrho\, d\varrho\, dz = ab \cdot 2\pi \cdot \int_0^c 2z \cdot \frac{z}{2}\, dz = \boxed{\frac{2\pi}{3} abc^3} \tag{2}$$

7. Sei $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0\}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ -x_1 x_3 \\ x_2 x_3^2 \end{pmatrix}$$

und $G := \{(x_1, x_2, x_3) \in M \,|\, x_3 \leq 2\} \subset M$.

(a) Sei $\nu : G \to S^2$ das in x_3-Richtung zeigende Einheitsnormalenfeld. Berechne das Flussintegral

$$\int_G \langle \operatorname{rot}(f), \nu\rangle\, dS$$

(b) Sei $\tau : \partial G \to S^2$ das Einheitsnormalenfeld entlang ∂G wie im Satz von Stokes. Berechne das Wegintegral

$$\int_{\partial G} \langle f, \tau\rangle\, dS.$$

Lösung:

(a) Wir berechnen zunächst

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} x_3^2 + x_1 \\ 0 \\ -x_3 - 3 \end{pmatrix}$$

und parametrisieren G als Graph über dem Kreis $\{u^2 + v^2 \leq 4\}$ mit

$$\psi : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 \leq 4\} \to G, \qquad \psi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{u^2+v^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Das dazugehörige Flächenelement ist gegeben durch

$$dS = \sqrt{\det\left(d\psi(u, v)^t d\psi(u, v)\right)}\, du\, dv.$$

Dies können wir alternativ schreiben als

$$dS = ||\partial_u \psi(u, v) \times \partial_v \psi(u, v)||\, du\, dv$$

In unserem Fall gilt

$$\partial_u \psi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \qquad \partial_v \psi(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v \end{pmatrix}$$

sowie

$$\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt liefert ein Normalenvektorfeld auf M. Da es in die gleiche Richtung wie ν zeigt, folgt

$$\nu(\psi(u,v)) = \frac{\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v)}{||\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v)||}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\int_G \langle \mathrm{rot}(f), \nu \rangle \, dS &= \int_{\{u^2+v^2 \le 4\}} \langle \mathrm{rot}(f)(\psi(u,v)), \partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v) \rangle \, du\, dv \\
&= \int_{\{u^2+v^2 \le 4\}} \left\langle \begin{pmatrix} (u^2+v^2)^2/4 + u \\ 0 \\ -(u^2+v^2)/2 - 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle du\, dv \\
&= \int_{\{u^2+v^2 \le 4\}} -\frac{1}{4}(u^2+v^2)^2 u - u^2 - \frac{1}{2}(u^2+v^2) - 3 \, du\, dv \\
&= \int_{\{u^2+v^2 \le 4\}} -u^2 - \frac{1}{2}(u^2+v^2) - 3 \, du\, dv \\
&= -3\mathrm{vol}_2(\{u^2+v^2 \le 4\}) - \int_{\{u^2+v^2 \le 2\}} u^2 + v^2 \, du\, dv \\
&= -12\pi - \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \, dr d\phi \\
&= -12\pi - \left[\frac{\pi}{2} r^4 \right]_{r=0}^{r=2} = -20\pi
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der vierten Zeile benutzt, dass das Integral über $u(u^2+v^2)^2$ verschwindet und in der fünften Zeile haben wir benutzt, dass

$$\int_{\{u^2+v^2 \le 4\}} u^2 \, du\, dv = \int_{\{u^2+v^2 \le 4\}} v^2 \, du\, dv = \int_{\{u^2+v^2 \le 4\}} \frac{1}{2}(u^2+v^2) \, dudv$$

gilt. Beides folgt aus der Symmetrie des Integrationsbereich und der jeweiligen Integranden.

(b) Wir parametrisieren $\{u^2+v^2=4\}$ auf die übliche Art durch $t \mapsto (2\cos(t), 2\sin(t))$ und benutzen die Parametrisierung ψ um hieraus eine Parametrisierung von ∂G zu erhalten:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \partial G, \qquad \gamma(t) := \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das Linienelement bezüglich γ ist gegeben durch

$$dS = ||\dot{\gamma}(t)|| dt$$

und das Tangentialvektorfeld τ ist gegeben durch

$$\tau(\gamma(t)) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||}$$

wobei man überprüft, dass γ den Rand ∂G in der korrekten Richtung durchläuft. Dann folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} \langle f, \tau \rangle \, dS &= \int_0^{2\pi} \left\langle f(\gamma(t)), \frac{\dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||} \right\rangle ||\dot{\gamma}(t)|| \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 6\sin(t) \\ -4\cos(t) \\ 8\sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} -12\sin^2(t) - 8\cos^2(t) \, dt \\ &= -20\pi\end{aligned}$$

8. Sei $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Bezeichne mit $\nu : M \to S^2$ das in x_3-Richtung zeigende Einheitsnormalenfeld von M. Berechne das Integral

$$\int_G \langle f, \nu \rangle \, dS$$

mit $G := \{(x_1, x_2, x_3) \in M \,|\, |x_3| \leq 1\}$ auf zwei Arten:

(a) direkt mit der Definition.

(b) mit Hilfe des Satzes von Stokes, indem Sie ein Vektorfeld g mit $\mathrm{rot}(g) = f$ finden und dieses entlang ∂G integrieren.

Lösung:

(a) Wir parametrisieren G als Graph über der Einheitskreisschreibe:

$$\psi : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 \leq 1\} \to M, \qquad \psi(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Flächenelement ist definiert durch

$$dS = \sqrt{\det\left(d\psi(u, v)^t d\psi(u, v)\right)} \, du \, dv$$

Dies können wir alternativ schreiben als

$$dS = ||\partial_u \psi(u, v) \times \partial_v \psi(u, v)|| \, du \, dv$$

In unserem Fall gilt

$$\partial_u \psi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \qquad \partial_v \psi(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

sowie

$$\partial_u \psi(u, v) \times \partial_v \psi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt liefert ein Normalenvektorfeld auf M. Da es in die gleiche Richtung wie ν zeigt, folgt

$$\nu(\psi(u,v)) = \frac{\partial_u\psi(u,v) \times \partial_v\psi(u,v)}{||\partial_u\psi(u,v) \times \partial_v\psi(u,v)||}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\int_G \langle f,\nu\rangle \, dS &= \int_{\{u^2+v^2\leq 1\}} \langle f(\psi(u,v)), \partial_u\psi(u,v) \times \partial_v\psi(u,v)\rangle \, du\, dv \\
&= \int_{\{u^2+v^2\leq 1\}} \left\langle \begin{pmatrix} u^2+v^2 \\ u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle du\, dv \\
&= \int_{\{u^2+v^2\leq 1\}} -2u(u^2+v^2) - 2uv + v \, du\, dv \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass aus Symmetriegründen die Integrale über die jeweiligen Summanden verschwinden. Bspw. ist das Integral von $u(u^2+v^2)$ über die linke Hälfte mit $u < 0$ genau das Negative von seinem Integral über die rechte Hälfte mit $u > 0$ und diese Werte haben sich gegenseitig auf.

(b) Sei $f(x_1,x_2,x_3) = (x_3,x_1,x_2)$ und betrachte die Gleichung $\mathrm{rot}(g) = f$:

$$\mathrm{rot}(g) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2}g_3 - \partial_{x_3}g_2 \\ \partial_{x_3}g_1 - \partial_{x_1}g_3 \\ \partial_{x_1}g_2 - \partial_{x_2}g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f$$

Diese Gleichungen hat viele Lösungen für g, welche durch Raten gefunden werden können, z. B.

$$g(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_3x_1 \\ x_1x_2 \\ x_2x_3 \end{pmatrix}.$$

Wir parametrisieren den Einheitskreis $\{u^2+v^2=1\}$ auf die übliche Art durch $t \mapsto (\cos(t),\sin(t))$ und wenden anschliessend die Parametrisierung ψ von oben an. Dies liefert die folgende Parametrisierung von ∂G

$$\gamma : [0,2\pi] \to \partial G, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Parametrisierung ist kompatibel mit der Orientierung, welche der Satz von Stokes vorgibt, und es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} \langle g,\tau\rangle \, dS &= \int_0^{2\pi} \langle g(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t)\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\cos(t)\sin(t) + \cos^2(t)\sin(t) \, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir wiederum benutzt, dass aus Symmetriegründen alle Integranden jeweils zu Null integrieren.