Serie 14 – Probeprüfung – Musterlösung

Hinweis: *Die Punktangaben sind, wo vorhanden, 1 zu 1 aus alten Prüfungen übernommen und gelten bloss als ungefähre Richtlinie für die kommende Prüfung.*

Aufgabe 1.
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x+\pi) & x > 0 \\ x^2 + x - 1 & x \leq 0. \end{cases}$$

1. Wo ist f stetig?
2. Wo ist f differenzierbar?
3. Wo ist f stetig differenzierbar?

Lösung:
Ausserhalb von $x = 0$ ist f stetig, differenzierbar und auch stetig differenzierbar.

[*1 Punkt*]

1. Es gilt $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = -1$ und $\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = -1$, deshalb ist f auch bei 0 stetig.

   [*2 Punkte (1 für Grenzwert, 1 für Schlussfolgerung)*]

2. Die Ableitung von f ausserhalb 0 ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin(x+\pi) & x > 0 \\ 2x + 1 & x < 0. \end{cases}$$

   Es gilt $\lim_{x\to 0, x>0} f'(x) = 0$ und $\lim_{x\to 0, x<0} f'(x) = 1$, deshalb ist f bei 0 nicht differenzierbar.

   [*2 Punkte (1 für Grenzwerte, 1 für Schlussfolgerung)*]

3. Da f bei 0 nicht differenzierbar ist, ist f dort insbesondere nicht stetig differenzierbar

   [*1 Punkt*]

Aufgabe 2.
Berechne die folgenden Grenzwerte:

1. $$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right),$$

2. $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x \right),$$

3.
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+n^2}{n^3}$$

Hinweis: *Interpretiere die Folgenglieder als Riemannsche Summen.*

Lösung:

1. Wir bringen alles auf einen Hauptnenner und kürzen:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right) &= \lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{x^2-4}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

[2 Punkte]

2. Wir erweitern, um die Wurzel zu entfernen, und erweitern dann mit $\frac{1}{x}$:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

[3 Punkte (1 Punkt pro Gleichheitszeichen)]

3. Das n-te Folgenglied ist eine Riemannsche Summe von $f(x)=x^2+1$ bezüglich der equidistanten Partition von $[0,1]$ mit Feinheit $\frac{1}{n}$. Daher gilt
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right)=\int_0^1 x^2+1\,dx=\frac{1}{3}x^3+x\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{4}{3}.$$

[2 Punkte]

Aufgabe 3.

1. Konvergiert die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^n\ ?$$

2. Für welche $x\in\mathbb{R}$ konvergiert die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\log(n+1)}\ ?$$

Lösung:

1. Wir wenden das Quotientenkriterium an:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{2}{3}.$$

Dies ist kleiner als 1, also konvergiert die Reihe.

[2 Punkte]

Alternative: Mit dem Wurzelkriterium ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \left(\frac{2}{3}\right) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \left(\frac{2}{3}\right),$$

woraus ebenfalls die Konvergenz folgt.

2. Wir berechnen zuerst den Konvergenzradius (beispielsweise mit l'Hospital)

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = 1.$$

Damit sehen wir, dass die Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

[3 Punkte (2 für Konvergenzradius, 1 für Schlussfolgerung)]

Alternative: Konvergenzradius mit Wurzelkriterium berechnen.

Es verbleiben die Punkte $x = 1$ und $x = -1$, welche wir separat betrachten müssen.

Für $x = 1$ nutzen wir, dass $\log(n+1) < n$ und können so abschätzen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Die harmonische Reihe divergiert bekanntermassen, also divergiert auch unsere Reihe für $x = 1$.

[2 Punkte]

Für $x = -1$ haben wir eine alternierende Reihe. Da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0$ und die Konvergenz dieser Folge monoton ist (resp. da alle $\frac{1}{\log(n+1)}$ positiv sind), konvergiert die Reihe.

[2 Punkte (Überprüfen, dass $\frac{1}{\log(n+1)} \to 0$ ist notwendig!)]

Aufgabe 4.
Berechne die folgenden Integrale:

1. $$\int xe^{-x^2}\,dx$$

2. $$\int (\log x)^2\,dx$$

3. $$\int \frac{9}{x^3-3x-2}\,dx$$

   Hinweis: -1 *ist eine doppelte Nullstelle des Nenners.*

Lösung:

1. Die Substitution $y = x^2$ liefert

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}e^{-y}\,dy = -\frac{1}{2}e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

[*2 Punkte*]

2. Wir wenden die Variablentransformation $y = \log(x)$ an, integrieren zweimal partiell und transformieren zurück:

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2\,dx &= \int y^2 e^y\,dy = e^y y^2 - \int 2ye^y\,dy \\ &= e^y y^2 - 2ye^y + \int 2e^y\,dy = e^y y^2 - 2ye^y + 2e^y + C \\ &= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C.\end{aligned}$$

[*3 Punkte (1 für Transformation inkl. Rücktransformation, 1 pro partielle Integration)*]

Alternative: Wir wenden partielle Integration an auf $1 \cdot (\log x)^2$.

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2\,dx &= x(\log x)^2 - \int 2(\log x)\frac{1}{x}x\,dx = x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx \\ &= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C.\end{aligned}$$

3. Mit dem Hinweis gilt $x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2$ und damit ist die Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{9}{x^3-3x-2}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{-4-x}{(x+1)^2}\,dx.$$

[*2 Punkte*]

Der erste Term ist

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \log|x-2| + C,$$

[*1 Punkt (mit Betrag!)*]

der zweite ist

$$
\begin{aligned}
\int \frac{-4-x}{(x+1)^2}\,dx &= -\int \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2}\,dx \\
&= \frac{3}{x+1} - \log|x+1| + C.
\end{aligned}
$$

[2 Punkte]

Insgesamt also

$$
\int \frac{9}{x^3-3x-2}\,dx = \frac{3}{x+1} + \log|\frac{x-2}{x+1}| + C
$$

Aufgabe 5.
Finde alle Lösungen der ODE

$$
\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 50\cos(x) \\ y(0) = 0, \end{cases}
$$

welche für $x \to \infty$ beschränkt sind.

Lösung:
Wir berechnen zuerst die homogene Lösung der ODE, also die Lösung von

$$
y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0.
$$

Das dazugehörige charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ mit Lösungen $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$. Die homogene Lösung ist damit

$$
y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.
$$

[2 Punkte]

Um eine partikuläre Lösung zu finden, machen wir den Ansatz $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ mit zu bestimmenden Konstanten a und b. Einsetzen in die ODE und auflösen der Gleichungen ergibt

$$
y_p = \sin x - 7\cos x.
$$

[2 Punkte]

Die allgemeine Lösung ist damit

$$
y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \sin x - 7\cos x.
$$

Aus der Bedingung $y(0) = 0$ ergibt sich die Bedingung

$$
C_1 = 7 - C_2.
$$

[1 Punkt]

Für Beschränktheit für $x \to \infty$ bemerken wir, dass $e^{-3x}, \sin x$ und $\cos x$ ohnehin beschränkt sind. Wir müssen also nur verlangen, dass $C_2 = 0$ gilt. Also

$$
\begin{aligned}
C_2 &= 0 \\
C_1 &= 7.
\end{aligned}
$$

[1 Punkt]

Die einzige Lösung, welche alle Bedingungen erfüllt, ist deshalb

$$y(x) = 7e^{-3x} + \sin x - 7\cos x.$$

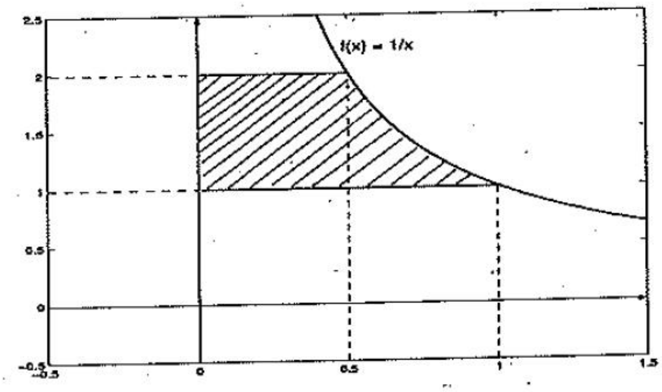
[1 Punkt]

Aufgabe 6.
Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = xye^{-xy}$$

im Bereich $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 1 \leq y \leq 2, |xy| \leq 1\}$.

Lösung:
Der Bereich D ist



Die Funktion f ist stetig auf D, welches ein kompakter Bereich ist. Nach dem Satz von Weierstrass folgt sofort, dass f im Bereich D ihr Maximum und ihr Minimum erreicht.

Zuerst suchen wir die globalen Extrema von f in D°. Der Gradient von f lautet

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{-xy}(1-xy) \\ xe^{-xy}(1-xy) \end{pmatrix}.$$

[1 Punkt]

Wir setzen $\nabla f = 0$ durch und erhalten danach das System

$$\begin{cases} ye^{-xy}(1-xy) = 0 \\ xe^{-xy}(1-xy) = 0\,, \end{cases}$$

dessen Lösungen sind alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $xy = 1$ und der Punkt $(0,0)$.

[1 Punkt für jede Lösung: 1+1=2]

Allerdings gehören diese Lösungen nicht zu D°.

[1 Punkt]

Somit müssen wir die globalen Extrema von f auf dem Rand ∂D suchen.

Wir schreiben ∂D als

$$\partial D = \bigcup_{i=1}^{4} \gamma_i\,,$$

wobei die γ_i

$$\begin{cases} \gamma_1 = \partial D \cap \{x = 0\} \\ \gamma_2 = \partial D \cap \{y = 1\} \\ \gamma_3 = \partial D \cap \{xy = 1\} \\ \gamma_4 = \partial D \cap \{y = 2\} \end{cases}$$

sind.

Wir bekommen deshalb

1.
$$f\Big|_{\gamma_1} = f(0,y) = 0\,;$$

[1 Punkt]

2.
$$f\Big|_{\gamma_2} = f(x,1) = xe^{-x} =: g_2(x)\,, \quad 0 \le x \le 1;$$

Es folgt
$$\max_{0\le x\le 1} g_2(x) = g_2(1) = e^{-1}$$

[1 Punkt]

und
$$\min_{0\le x\le 1} g_2(x) = g_2(0) = 0\,;$$

[1 Punkt]

3.
$$f\Big|_{\gamma_3} = f(x,1/x) = e^{-1}\,;$$

[1 Punkt]

4.
$$f\Big|_{\gamma_4} = f(x,2) = 2xe^{-2x} =: g_4(x)\,, \quad 0 \le x \le 1/2;$$

Es folgt
$$\max_{0\le x\le 1/2} g_4(x) = g_4(1/2) = e^{-1}$$

[1 Punkt]

und
$$\min_{0\le x\le 1/2} g_4(x) = g_4(0) = 0\,;$$

[1 Punkt]

Wir schliessen
$$\max_D f = e^{-1}\,, \quad \min_D f = 0\,.$$

[2 Punkte]

Aufgabe 7.
Berechne die Taylorreihen der folgenden Funktionen im Ursprung:

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^5}$.

   Hinweis: *Wenn Du keine explizite Formel für die Taylorreihe findest, gib das Taylorpolynom der Ordnung* 3 *an.*

2. Berechne den Wert der Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}$$

   Hinweis: *Verstehe die obige Reihe geeignet als Taylorreihe und benutze* $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lösung:

1. Es gilt $\sqrt[3]{x^3+x^5} = x\sqrt[3]{1+x^2}$, wir müssen deshalb nur die Taylorreihe von $\sqrt[3]{1+x^2}$ berechnen. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass
$$\sqrt[3]{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} x^n.$$
Setzen wir also x^2 statt x ein, kriegen wir letztlich die Lösung
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3+x^5} &= x\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} x^{2n+1}.\end{aligned}$$
Mit direktem Rechnen kann man die ersten drei Terme des Taylorpolynoms berechnen und mit den ersten drei Termen der Lösung vergleichen.

2. Die Taylorreihe von $\arctan(x)$ ist gegeben durch
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{1+2k}}{1+2k}.$$
Setzen wir also wie im Hinweis angedeutet $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ein, kriegen wir
$$\begin{aligned}\frac{\pi}{6} &= \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+2k)3^{k+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+2k)3^k},\end{aligned}$$
also ist die Lösung $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

Aufgabe 8.
Berechne das Volumen des Körpers
$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+z^2 \leq (\cos(y))^2, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Lösung:
Wir parametrisieren den Körper mit Zylinderkoordinaten (r,φ,y). Das ergibt
$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(K) &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{|\cos y|} r\,dr\,dy\,d\varphi \\ &= 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{|\cos y|} dy \\ &= \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^2\,dy\end{aligned}$$

[3 Punkte (auch, wenn Formel direkt hingeschrieben mit Erwähnung von Rotationskörper)]

Damit ist das Volumen

$$\mathrm{Vol}(K) = \pi \frac{y + \sin y \cos y}{2}\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\pi^2.$$

[*2 Punkte*]

Aufgabe 9.

1. Berechne die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^{5\times 3} \to \mathbb{R}, \quad f(X) = \det(X^T X)$$

2. Ist die Menge $\{X \in \mathbb{R}^{5\times 3} \mid f(X) = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit? (Begründung ist erforderlich.) Was ist ihre Dimension? Berechne ggf. den Tangentialraum an der Stelle

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

1. Wir wissen aus Serie 5, dass für $g(Y) = \det(Y)$ gilt $dg(Y)H = \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(Y)H)$, wobei Y eine Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist. Durch Komposition mit der Abbildung $X \mapsto X^T X$, deren Ableitung in Richtung H gegeben ist durch $X^T H + H^T X$, erhalten wir dann

$$df(X)H = \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(X^T X)(X^T H + H^T X)).$$

2. Die Menge ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $15 - 1 = 14$. Zum Beweis verwenden wir den Satz vom regulären Wert. Wir müssen dazu zeigen, dass für alle Matrizen X in der Menge gilt, dass $df(X) \neq 0$. Setze dazu z. B. in der Formel oben $H = X$ ein und erhalte mit der bekannten Formel $\mathrm{adj}(A)A = \det(A)\mathbb{1}$

$$\begin{aligned} df(X)X &= \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(X^T X)(X^T X + X^T X)) = 2\,\mathrm{tr}(\mathrm{adj}(X^T X)X^T X) \\ &= 2\det(X^T X)\,\mathrm{tr}(\mathbb{1}_{3\times 3}) = 6\det(X^T X) = 6. \end{aligned}$$

Also ist insbesondere $df(X) \neq 0$.

Der Tangentialraum an X wie oben ist

$$\begin{aligned} T_X M = \ker df(X) &= \{H \in \mathbb{R}^{5\times 3} \mid \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(X^T X)(X^T H + H^T X)) = 0\} \\ &= \{H \in \mathbb{R}^{5\times 3} \mid \mathrm{tr}(X^T H + H^T X) = 0\} \\ &= \{H \in \mathbb{R}^{5\times 3} \mid \mathrm{tr}(X^T H) = 0\} \\ &= \{H \in \mathbb{R}^{5\times 3} \mid \mathrm{tr}(H_{3\times 3}) = 0\}. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile ist $H_{3\times 3}$ der obere 3×3-Block von H, also

$$H = \begin{pmatrix} H_{3\times 3} \\ * \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.
Betrachte das (zeitunabhängige) Vektorfeld

$$v(x) = Ax,$$

mit $x \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine 2×2-Matrix.

Berechne für folgende A jeweils Eigenwerte und Eigenvektoren und zeichne darauf basierend das Phasenportrait.

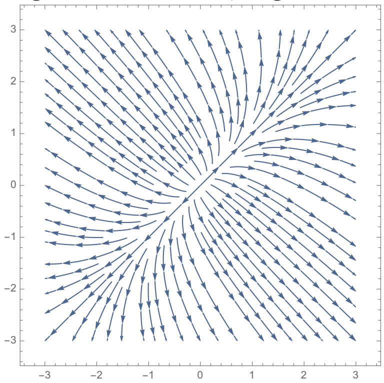
1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 \\ -0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$

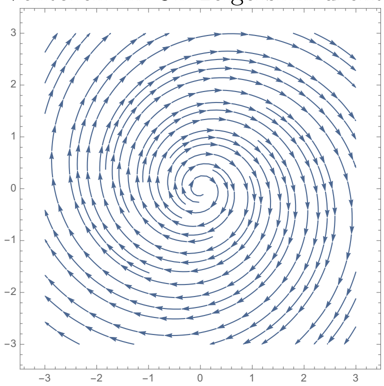
3. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Lösung:

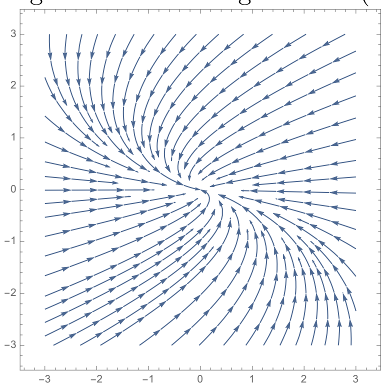
1. Eigenwerte 1 und 3, Eigenvektoren $(1, 1)$ und $(-1, 1)$ (Berechnung jeweils erforderlich!)



2. Eigenwerte $0.1 + 0.5i$ und $0.1 - 0.5i$, Eigenvektoren $(-i, 1)$ und $(i, 1)$
Da die Eigenwerte Realteil >0 besitzen, ist die Spirale gegen aussen orientiert. Da die Matrix Vektoren im Uhrzeigersinn dreht, ist die Spirale ebenfalls im Uhrzeigersinn orientiert.



3. Eigenwert -2 und Eigenvektor $(1, 0)$



Aufgabe 11.
Sei $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0\}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_2 x_3^2 \end{pmatrix}$$

und $G := \{(x_1, x_2, x_3) \in M \,|\, x_3 \leq 2\} \subset M$.
Sei $\nu : G \to S^2$ das in x_3-Richtung zeigende Einheitsnormalenfeld. Berechne das Flussintegral

$$\int_G \langle \mathrm{rot}(f), \nu \rangle \, dS$$

Lösung:
Verschiedene mögliche Lösungen:

1. Sei $\tau : \partial G \to S^2$ das Einheitsnormalenfeld entlang ∂G wie im Satz von Stokes. Wir berechnen das Wegintegral
$$\int_{\partial G} \langle f, \tau \rangle \, dS.$$
Dazu parametrisieren wir $\{u^2 + v^2 = 4\}$ auf die übliche Art durch $t \mapsto (2\cos(t), 2\sin(t))$ und benutzen die Parametrisierung ψ um hieraus eine Parametrisierung von ∂G zu erhalten:
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \partial G, \qquad \gamma(t) := \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 2 \end{pmatrix}$$
Das Linienelement bezüglich γ ist gegeben durch
$$dS = ||\dot{\gamma}(t)||dt$$
und das Tangentialvektorfeld τ ist gegeben durch
$$\tau(\gamma(t)) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma(t)}||}$$
wobei man überprüft, dass γ den Rand ∂G in der korrekten Richtung durchläuft. Dann folgt
$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \langle f, \tau \rangle \, dS &= \int_0^{2\pi} \left\langle f(\gamma(t)), \frac{\dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||} \right\rangle ||\dot{\gamma}(t)|| \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 6\sin(t) \\ 4\cos(t) \\ 8\sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} -12\sin^2(t) + 8\cos^2(t) \, dt \\ &= -4\pi\,. \end{aligned}$$

2. Wir berechnen zunächst
$$\mathrm{rot}(f) = \begin{pmatrix} x_3^2 - x_1 \\ 0 \\ x_3 - 3 \end{pmatrix}$$

und parametrisieren G als Graph über dem Kreis $\{u^2+v^2 \leq 4\}$ mit

$$\psi : \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2+v^2 \leq 4\} \to G, \qquad \psi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{u^2+v^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Das dazugehörige Flächenelement ist gegeben durch

$$dS = \sqrt{\det\left(d\psi(u,v)^t d\psi(u,v)\right)}\, du\, dv.$$

Dies können wir alternativ schreiben als

$$dS = ||\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v)||\, du\, dv$$

In unserem Fall gilt

$$\partial_u \psi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \qquad \partial_v \psi(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v \end{pmatrix}$$

sowie

$$\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt liefert ein Normalenvektorfeld auf M. Da es in die gleiche Richtung wie ν zeigt, folgt

$$\nu(\psi(u,v)) = \frac{\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v)}{||\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v)||}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\int_G \langle \mathrm{rot}(f), \nu \rangle\, dS &= \int_{\{u^2+v^2 \leq 4\}} \langle \mathrm{rot}(f)(\psi(u,v)), \partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v) \rangle \, du\, dv \\
&= \int_{\{u^2+v^2 \leq 4\}} \left\langle \begin{pmatrix} (u^2+v^2)^2/4 - u \\ 0 \\ (u^2+v^2)/2 - 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle du\, dv \\
&= \int_{\{u^2+v^2 \leq 4\}} -\frac{1}{4}(u^2+v^2)^2 u + u^2 + \frac{1}{2}(u^2+v^2) - 3\, du\, dv \\
&= \int_{\{u^2+v^2 \leq 4\}} u^2 + \frac{1}{2}(u^2+v^2) - 3\, du\, dv \\
&= -3\mathrm{vol}_2(\{u^2+v^2 \leq 4\}) + \int_{\{u^2+v^2 \leq 2\}} u^2+v^2\, du\, dv \\
&= -12\pi + \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3\, dr d\phi \\
&= -12\pi + \left[\frac{\pi}{2} r^4\right]_{r=0}^{r=2} = -4\pi
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der vierten Zeile benutzt, dass das Integral über $u(u^2+v^2)^2$ verschwindet und in der fünften Zeile haben wir benutzt, dass

$$\int_{\{u^2+v^2 \leq 4\}} u^2\, du\, dv = \int_{\{u^2+v^2 \leq 4\}} v^2\, du\, dv = \int_{\{u^2+v^2 \leq 4\}} \frac{1}{2}(u^2+v^2)\, dudv$$

gilt. Beides folgt aus der Symmetrie des Integrationsbereich und der jeweiligen Integranden.

Aufgabe 12.
Sei $v = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$ und $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \geq 0\}$. Berechne

$$\int_S v \cdot d\sigma.$$

Lösung:
Wir bezeichnen mit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \geq 0\}$ die Halbkugel und mit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Scheibe in der z-Ebene, so dass der Rand von V die Vereinigung von S und D ist. Wir wenden den Divergenzsatz auf das Vektorfeld an, um zu schreiben:

$$\int_S v \cdot d\sigma = \int_V \operatorname{div} v \, dV - \int_D v \cdot d\sigma.$$

[*1 Punkt*]

Die Divergenz von v ist $\operatorname{div} v = x^2 + y^2 + z^2$. Durch die Verwendung von Kugelkoordinaten kriegen wir

$$\int_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{2\pi}{5}.$$

[*3 Punkte*]

Um das Integral über die Scheibe zu berechnen, bemerken wir, dass $v|_D = (0, x^2y, 2xy)$ und dass der Normalenvektor gegeben ist durch $(0,0,-1)$. Damit ist

$$\int_D v \cdot d\sigma = -\int \int 2xy \, dx \, dy = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt die Symmetrie ausgenutzt haben.

[*2 Punkte*]

Insgesamt ist damit

$$\int_S v \cdot d\sigma = \frac{2\pi}{5}.$$

[*1 Punkt*]