Musterlösung Serie 1

1. Wir setzen einige Grenzwerte aus der Vorlesung als bekannt voraus. Diese sind aufgelistet und bewiesen im Königsberger, Kapitel 5.1: *Wichtige Folgen und Grenzwerte.*

   (a) Da der Limes mit Addition und Division vertauscht werden kann, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n}{3n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+5\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n^2}} = \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

   (b) Die Folge divergiert, da $|a_n - a_{n+1}| = 2n+1$. Genau genommen zeigt dieses Argument, dass die Folge keine Cauchy-Folge ist. In der Vorlesungen haben wir aber gesehen, dass jede konvergente Folge Cauchy ist.

   (c) Wir erweitern mit der dritten binomischen Formel und erhalten:

$$0 \le a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \le \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

   Da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, muss auch a_n gegen 0 konvergieren.

   (d) Durch Vertauschen des Limes mit dem Produkt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}}{k!}\cdot\frac{n^k}{2^n} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{k!}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n}\right) = 0
\end{aligned}$$

   Den letzten Grenzwert setzen wir als bekannt voraus.

   (e) Da $\left|\frac{3+4\mathbf{i}}{5}\right| = 1$ erhalten wir

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\left(\frac{3+4\mathbf{i}}{5}\right)^n\left(\frac{3+4\mathbf{i}}{5} - 1\right)\right| = \left|\frac{3+4\mathbf{i}}{5} - 1\right| = \frac{1}{5}\sqrt{20}.$$

   Wie in Teil (b) sehen wir also, dass die Folge nicht Cauchy ist und somit nicht konvergieren kann.

   (f) Wir schätzen ab

$$5 = \sqrt[n]{5^n} \le a_n = \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n} \le \sqrt[n]{3\cdot 5^n} = \sqrt[n]{3}\cdot 5$$

   Da $\sqrt[n]{3}$ gegen 1 konvergiert, folgt sofort, dass a_n gegen 5 konvergiert.

   (g) Wir schätzen ab

$$1 \le a_n = \sqrt[n]{7n^6+2n^2+1} \le \sqrt[n]{10n^6} = \sqrt[n]{10}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^6$$

   Somit konvergiert a_n gegen 1, da sowohl $\sqrt[n]{10}$ als auch $\sqrt[n]{n}$ gegen 1 konvergieren,

(h) Wir verwenden, dass $\frac{n^{10}}{2^n}$ gegen 0 konvergiert um den Limes zu berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - n^{10}}{2^n + n^{10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{n^{10}}{2^n}}{1 + \frac{n^{10}}{2^n}} = 1.$$

2. (a) Die Reihe divergiert, da die Folge $\frac{n+1}{n}$ gegen 1 konvergiert und somit keine Nullfolge ist.

(b) Die Summanden wachsen qualitativ wie $\frac{1}{n}$ und wir zeigen, dass die Reihe divergiert indem wir sie gegen die harmonische Reihe abschätzen. Für $n \geq 4$ gilt $n - \sqrt{n} \geq \frac{1}{2}n$ und folglich

$$\frac{n - \sqrt{n}}{(n + \sqrt{n})^2} \geq \frac{n/2}{(n+n)^2} = \frac{1}{8n}$$

Dies liefert die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n - \sqrt{n}}{(n + \sqrt{n})^2} \geq \frac{1}{8} \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n}.$$

Da die harmonische Reihe divergiert, strebt die rechte Seite gegen $+\infty$ für $N \to \infty$.

(c) Die Reihe divergiert. Wir machen die grobe Abschätzung

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n} \leq \sqrt[n]{n \cdot n \cdots n} = n.$$

Damit folgt direkt

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

und da die harmonische Reihe divergiert strebt die rechte Seite gegen $+\infty$ für $N \to \infty$.

(d) Die Reihe konvergiert. Wir zeigen die stärkere Bedinung der absoluten Konvergenz, d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n + \mathbf{i}^n}{(3\mathbf{i})^n - 2^n} \right| < \infty$$

Hierfür schätzen wir zunächst den Betrag ab:

$$\left| \frac{(-1)^n + \mathbf{i}^n}{(3\mathbf{i})^n - 2^n} \right| = \frac{|(-1)^n + \mathbf{i}^n|}{|(3\mathbf{i})^n - 2^n|} \leq \frac{\sqrt{2}}{||(3\mathbf{i})^n| - |2^n||} = \frac{\sqrt{2}}{3^n - 2^n}$$

Mit $3^n - 2^n \geq 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$ folgt dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n + \mathbf{i}^n}{(3\mathbf{i})^n - 2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} = 2\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\sqrt{2}.$$

Der letzte Schritt folgt aus der Formel für die geometrische Reihe.

(e) Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1.$$

(f) Wir argumentieren wieder mit dem Quotientenkriterium. Definiere $a_n = \binom{2n}{n} 3^{-n}$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{3(n+1)^2} = \frac{4}{3} > 1.$$

und die Reihe divergiert nach dem Quotientenkriterium.

3. Wir wollen den Limes der Folge

$$s_n := \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}.$$

bestimmen. Betrachte dafür die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

sowie die Partition $P_n := \{x_k = \frac{k}{n} \,|\, k = 0, \ldots, n\} \in \mathcal{P}[0,1]$. Dann folgt aus $\frac{k}{n} = x_k \in [x_{k-1}, x_k]$ offenbar

$$\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \le \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \le \sup_{x\in[x_{k-1}],x_k} f(x)$$

und da $(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n}$ für alle k gilt folgern wir

$$\underline{S}(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \le s_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = \overline{S}(f,P_n).$$

(In unserem Fall gilt sogar die stärkere Aussage $s_n = \underline{S}(f,P_n)$.) Beachte, dass die Feinheit $\mu(P_n) = \frac{1}{n}$ der Partitionen P_n gegen 0 konvergiert. Da f stetig und somit insbesondere Riemann-intergierbar ist, konvergieren $\underline{S}(f,P_n)$ und $\overline{S}(f,P_n)$ beide gegen das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ wenn n gegen ∞ strebt. Aus der Abschätzung oben folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arcsinh}(x)\Big|_{x=0}^{x=1} = \operatorname{arcsinh}(1) - \operatorname{arcsinh}(0) = \log(\sqrt{2}+1).$$

Die Werte von $\operatorname{arcsinh}(x)$ erhält man, indem man die Gleichung $x = \sinh(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ nach y auflöst. Als Ergebnis bekommt man $y = \operatorname{arcsinh}(x) = \log(\sqrt{x^2+1}+x)$. Insbesondere also $\operatorname{arcsinh}(0) = 0$ und $\operatorname{arcsinh}(1) = \log(\sqrt{2}+1)$.

4. (a) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + 7\lambda - 15$ sind

$$\lambda_1 = \frac{-7+\sqrt{109}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-7-\sqrt{109}}{2}.$$

Die allgemeine Lösung ist folglich

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

(b) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^4 - 1$ sind

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = \mathbf{i}, \quad \lambda_4 = -\mathbf{i}.$$

Die allgemeine reelle Lösung ist folglich

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin(x) + c_4 \cos(x).$$

(c) Das charakteristische Polynom $\lambda^4+4\lambda^2+4\lambda$ hat die beiden doppelten Nullstellen $\pm\sqrt{2}\mathbf{i}$. Damit ergibt sich die homogene Lösung als

$$y_h(x) = c_1\cos(\sqrt{2}x) + c_2\sin(\sqrt{2}x) + c_3 x\cos(\sqrt{2}x) + c_4 x\sin(\sqrt{2}x).$$

Der Ansatz $y_p(x) = k_2x^2 + k_1x + k_0$ liefert nach Einsetzen und Koeffizientenvergleich ein 3×3-System mit der Lösung $k_2 = 1/4 \,\wedge\, k_1 = 0 \,\wedge\, k_0 = -1/2$. Also gilt

$$y_p(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}.$$

(d) Das charakteristische Polynom $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2$ hat eine doppelte Nullstelle in 0 und einfache Nullstellen in $1 \pm 2\mathbf{i}$. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung als

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x \cos(2x) + c_4 \cos(2x).$$

5. Die Substitution $x = e^t$ und $h(t) = y(e^t)$ liefert

$$h(t) = y(e^t) = y(x), \qquad h'(x) = y'(e^t)e^t = xy'(x)$$
$$h''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = x^2y''(x) + xy'(x).$$

Wir erhalten damit die Beziehungen

$$x^2y''(x) = h''(t) - h'(t), \qquad xy'(x) = h'(t), \qquad y(x) = h(t).$$

(a) Die Gleichung ist äquivalent zu

$$h''(t) - 4h(t) + 5h(t) = 0.$$

Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ hat die Nullstellen $2 \pm \mathbf{i}$ und somit lautet die allgmeine Lösung

$$h(t) = c_1 e^{2t} \cos(t) + c_2 e^{2t} \sin(t)$$

sowie

$$y(x) = h(\log(x)) = c_1 x^2 \cos(\log(x)) + c_2 x^2 \sin(\log(x)).$$

(b) Die Gleichung ist äquivalent zu

$$2h'(t) - h(t) = t.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $2h'(t) - h(t) = 0$ ist gegeben durch $h_{hom}(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}}$. Eine particuläre Lösung ist gegeben durch $h_p(t) = -(2+t)$ und somit lautet die allgemeine Lösung

$$h(t) = h_{hom}(t) + h_p(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} - 2 - t.$$

Damit folgt

$$y(x) = h(\log(x)) = c_1\sqrt{x} - 2 - \log(x).$$

6. Wir lösen zunächst die homogene Gleichung $y'(t) = a(t)y(t)$. Bezeichne mit $A(t)$ eine Stammfunktion von $a(t)$, dann liefert der Ansatz der Separation der Variablen

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(t)\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \log|y| = A(t) + c \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \pm e^c \cdot e^{A(t)}.$$

Beachte, dass $\pm e^c$ eine beliebige reelle Konstante bezeichnet, welche wir der Übersichtlichkeit wegen einfach mit c bezeichnen. Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y(t) = ce^{A(t)}.$$

Variation der Konstanten bedeutet, dass wir den Ansatz $y(t) = c(t)y_h(t)$ mit $y_h(t) = e^{A(t)}$ machen. Da y_h die homogene Gleichung löst erhalten wir mit diesem Ansatz

$$y'(t) = c'(t)y_h(t) + c(t)y_h'(t) = c'(t)y_h(t) + c(t)a(t)y_h(t) = c'(t)y_h(t) + a(t)y(t).$$

Somit ist die Gleichung $y'(t) = a(t)y(t) - b(t)$ äquivalent zu

$$c'(t)y_h(t) = -b(t) \quad \Leftrightarrow \quad c(t) = -\int \frac{b(t)}{y_h}\,dt + c_0 = -\int b(t)e^{-A(t)}\,dt + c_0$$

und wir erhalten die allgemeine Lösung

$$y(t) = \left(c_0 - \int b(t)e^{-A(t)}\,dt\right) e^{A(t)}.$$