Musterlösung Serie 2

1. (a) i. Definitheit lässt sich zeigen mittels Kontraposition:
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ nicht der Nullvektor. Dann besitzt x mindestens einen Eintrag $x_i \neq 0$ und für eine beliebige der obigen Normen gilt $||x|| \geq |x_i| \neq 0$.

ii. Absolute Homogenität:
Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt $||\lambda \cdot x||_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda \cdot x_i| = \sum_{i=1}^n |\lambda| \cdot |x_i| = |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \cdot ||x||_1$ und analog für $|| \cdot ||_2$ sowie $|| \cdot ||_\infty$. (Für $|| \cdot ||_2$ beachte, dass $\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$ gilt.)

iii. Subadditivität / Dreiecksungleichung:
Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt $||x + y||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = ||x||_1 + ||y||_1$ und analog für $|| \cdot ||_2$ sowie $|| \cdot ||_\infty$. (Für $|| \cdot ||_2$ beachte, dass $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ gilt.)

(b) Es gilt $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \cdot \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = n||x||_\infty$ und $||x||_\infty \leq ||x||_1$, also insbesondere $\frac{1}{n}||x||_\infty \leq ||x||_1$.
Weiter gilt $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sqrt{n \cdot \max\{x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2\}} = \sqrt{n} \cdot \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = \sqrt{n}||x||_\infty$ und $||x||_\infty \leq ||x||_2$, also insbesondere $\frac{1}{\sqrt{n}}||x||_\infty \leq ||x||_2$.
Da Äquivalenz von Normen insbesondere transitiv ist, folgt, dass alle drei Normen äquivalent sind.

*(c) Die Normen $||x||_1$ und $||x||_\infty$ sind auch auf $\mathbb{R}^\infty$ wohldefiniert, da nur endlich viele Einträge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^\infty$ von 0 verschieden sein können. Nun finden wir aber für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_{>0}$ einen Vektor y mit $||y||_1/||y||_\infty = n$ zum Beispiel $y = \sum_{i=1}^n e_i$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist.

2. (a) Positive Definitheit und Symmetrie sind klar.
Aus den Eigenschaften von $|| \cdot ||_2$ folgt

$$||x - y||_2 \leq ||x - z||_2 + ||z - y||_2 \leq ||x||_2 + ||z||_2 + ||z||_2 + ||y||_2$$

und

$$||x||_2 + ||y||_2 \leq ||x - z||_2 + ||z||_2 + ||y||_2 \leq ||x||_2 + ||z||_2 + ||z||_2 + ||y||_2,$$

woraus aus Symmetriegründen (bzw. durch Vertauschung von x und y) alle gewünschten Ungleichungen folgen.

(b) Betrachte die Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $a_i = \left(2^{-i}, 1\right) \in \mathbb{R}^2$. Dann konvergiert diese Folge in der euklidischen Metrik gegen $(0, 1)$, während in der Französischen Eisenbahnmetrik gilt:

$$d(a_i, a_j) = d\left(a_i, (0,0)\right) + d((0,0), a_j) \geq 1 + 1 = 2, \quad \text{für } i \neq j.$$

Somit ist $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nicht einmal eine Cauchy-Folge bezüglich d, also insbesondere nicht konvergent.

3. (a) Weder offen, noch abgeschlossen. Häufungspunkte $\mathrm{HP}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq ||x||_2 \leq 2\right\}$, Randpunkte $\partial A = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{1}{2} = ||x||_2 = 2\right\}$, innere Punkte $A^\circ = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{1}{2} < ||x||_2 < 2\right\}$.

(b) Weder offen, noch abgeschlossen.

$$\mathrm{HP}(B) = \partial B = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 + x_2 = \frac{1}{n} \text{ für } n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0 \right\},$$

$B^\circ = \emptyset$.

(c) Abgeschlossen. $\mathrm{HP}(C) = \{0\}$, $\partial C = C$, $C^\circ = \emptyset$.

(d) Weder offen, noch abgeschlossen. $\mathrm{HP}(D) = \partial D = \mathbb{R}$, $D^\circ = \emptyset$.

4. Untersuche die folgenden Funktionen auf ihre Stetigkeit:

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir zeigen Stetigkeit bezüglich $||\cdot||_1$ an der Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ über das ϵ-δ-Kriterium. Sei $\epsilon > 0$ und wähle $\delta = \epsilon$. Dann gilt für $(x', y') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ mit $||(x, y) - (x', y')||_1 < \delta$, dass

$$\begin{aligned} ||(x+y) - (x'+y')||_1 &= \sum_{i=1}^n |(x_i + y_i) - (x'_i + y'_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i - x'_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - y'_i| = ||(x, y) - (x', y')||_1 < \delta = \epsilon, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $(x_n), (y_n)$ zwei Folgen, die gegen x bzw. y konvergieren. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq ||x_n|| \cdot ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \cdot ||y||, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt eine Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist. Nun ist $||x_n||$ beschränkt und $||y_n - y||$ sowie $||x_n - x||$ sind Nullfolgen. Somit konvergiert $\langle x_n, y_n\rangle$ gegen $\langle x, y\rangle$, was zu zeigen war.

(c) Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ beliebig und $(x_n), (y_n)$ zwei Folgen, die gegen x bzw. y konvergieren. Dann gilt

$$\begin{aligned} ||(x_n \times y_n) - (x \times y)|| &= ||(x_n \times y_n) - (x_n \times y) + (x_n \times y) - \langle x, y\rangle|| \\ &= ||\,(x_n \times (y_n - y)) + ((x_n - x) \times y)\,|| \\ &\leq ||\,(x_n \times (y_n - y))\,|| + ||\,((x_n - x) \times y)\,|| \\ &\leq ||x_n|| \cdot ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \cdot ||y||. \end{aligned}$$

Nun ist $||x_n||$ beschränkt und $||y_n - y||$ sowie $||x_n - x||$ sind Nullfolgen. Somit konvergiert $x_n \times y_n$ gegen $x \times y$, was zu zeigen war.

5. Wir zeigen zuerst die Stetigkeit der Einschränkung auf Geraden.
Auf der Geraden beschrieben durch $x = 0$ ist f konstant 0, also insbesondere stetig. Alle anderen Geraden durch den Nullpunkt lassen sich beschreiben durch $y = a \cdot x$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Einsetzen liefert

$$g(x) := f(x, a \cdot x) = \begin{cases} |a/x| \cdot 2^{-|a/x|} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun gilt

$$\lim_{x \to 0} |a/x| \cdot 2^{-|a/x|} = \lim_{k \to \infty} k \cdot 2^{-k} = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{2^k} = 0.$$

Trotzdem ist f nicht überall stetig.
Auf der Parabel beschrieben durch $y = x^2$ gilt

$$h(x) := f(x, x^2) = \begin{cases} 1 \cdot 2^{-1} = 1/2 & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

was beweist, dass f an der Stelle $(0, 0)$ unstetig ist.

6. (a) Sei $x, y \in B$ und $t \in [0, 1]$. Wir müssen zeigen, dass $z := xt + y(1 - t) \in B$ gilt. Aus den Eigenschafter einer Normfunktion folgt

$$||z|| = ||xt + (1 - t)y|| \leq ||xt|| + ||(1 - t)y|| = t||x|| + (1 - t)||y|| < t + (1 - t) = 1$$

Dabei haben wir $||x||, ||y|| < 1$ im vorletzen Schritt benutzt. Aus $||z|| < 1$ folgt sofort $z \in B$.

(b) Sei $x \in B$ gegeben und definiere $\epsilon := 1 - ||x|| > 0$. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$B_\epsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||x - y|| < \epsilon\} \subset B,$$

da $||y|| = ||x + (y - x)|| \leq ||x|| + ||x - y|| < ||x|| + \epsilon = 1$. Hieraus folgt, dass B offen ist.

(c) Für jede Normfunktion gilt $||0|| = 0$ und somit $0 \in B$.

(d) Für jede Normfunktion gilt $|| - x|| = |(-1)| \cdot ||x|| = ||x||$. Folglich gilt $||x|| < 1$ genau dann wenn $|| - x|| < 1$ gilt. Daraus folgt die Behauptung.

(e) Wir folgern die Behauptung aus der Tatsache, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Bezeichne mit $|| \cdot ||_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ und wähle $c > 0$, sodass $\frac{1}{c}||x||_2 \leq ||x|| \leq c||x||_2$ gilt. Dann folgt

$$B = B_1(0, || \cdot ||) \subset B_c(0, || \cdot ||_2)$$

und somit ist B beschränkt.