Musterlösung Serie 3

1. Wir betrachten die Funktion

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-\pi)(y-1)^3}{(x-1)^2+|y-1|}, & \text{falls } (x,y) \neq (1,1) \\ -\pi, & \text{falls } (x,y) = (1,1)\,. \end{cases}$$

Ist g stetig an der Stelle $(1,1)$?
Was ist mit $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto ((x-1)g(x,y), (y-1)g(x,y))$?

Lösung:
Es gilt

$$\frac{|(x-\pi)(y-1)^3|}{(x-1)^2+|y-1|} \leq \frac{|x-\pi||y-1|^3}{|y-1|} = |x-\pi|(y-1)^2\,.$$

Und somit gilt

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} g(x,y) \leq \lim_{(x,y)\to(1,1)} |x-\pi|(y-1)^2 = 0.$$

Also ist g nicht stetig an der Stelle $(1,1)$.
Für f hingegen gilt sowohl

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 0,$$

als auch $f(1,1) = 0$.

2. Berechne das Matrixexponential

$$e^{tA} := \exp(tA) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

für die folgenden Matrizen.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 0 \\ 20 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Da A eine Diagonalmatrix ist, können wir ihre Potenzen direkt angeben durch

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 15^k \end{pmatrix}.$$

Damit folgt mit der Definition des Matrixexponentials:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{15t} \end{pmatrix}.$$

(b) Zerlege $A = D + N$ mit

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da D ein Vielfaches der Identitätsmatrix ist, kommutieren die Komponenten D und N, d.h. $DN = ND$. Unter dieser Voraussetzung gilt genau wie bei der reellen Exponentialfunktion die Multiplikationsregel

$$e^{tA} = e^{tD} e^{tN}.$$

Wie in Teil (a) erhält man

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Für N berechnen wir

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt $N^k = 0$ für $k \geq 3$ und aus der Definition des Matrixexponentials folgt:

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit folgt

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Sei $A_0 := \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 20 & -11 \end{pmatrix}$. Diese Matrix ist diagonalisierbar als $A_0 = QDQ^{-1}$ mit

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aus der Formel $A_0^k = QD^kQ^{-1}$ kann man $\exp(A_0) = Q \exp(D^k) Q^{-1}$ folgern. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{tA_0} &= Q \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6e^t - 5e^{-t} & -3e^t + 3e^{-t} \\ 10e^t - 10e^{-t} & -5e^t + 6e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da die ursprüngliche Matrix A eine Blockdiagonalmatrix ist, erhalten wir

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 6e^t - 5e^{-t} & -3e^t + 3e^{-t} & 0 \\ 10e^t - 10e^{-t} & -5e^t + 6e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

(d) Wir zerlegen die Matrix als $A = D + H$ mit

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie in Teil (b) sehen wir, dass $DH = HD$ gilt und somit

$$e^{tA} = e^{tD} e^{tH}.$$

Da D eine Diagonalmatrix ist, erhalten wir für den ersten Faktor

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix H berechnen wir die ersten Potenzen zu:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H^3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H^4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt $H^k = H^{k+4}$, das heisst alle vier Potenzen erhalten wir die selbe Matrix, und ausserdem gilt $H^{k+2} = -H^k$. Damit berechnen wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H^k = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!} & -\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} & \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Alternativ, könnte man H auch in eine komplexe Diagonalmatrix transformieren um dann analog wie in Teil (c) die Exponentialmatrix e^{tH} berechnen. Für das Matrixexpoential von A erhalten wir:

$$e^{tA} = e^{tD} e^{tH} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

3. (a) Zeige für $A, T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, T invertierbar die Identität

$$T^{-1} \cdot e^A \cdot T = e^{T^{-1} \cdot A \cdot T}.$$

(b) Zeige für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Identität

$$\det\left(e^A\right) = e^{\operatorname{tr}(A)}$$

wobei $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ die Spur von A bezeichnet.

Tip: *Zeige zunächst, dass die Formel für eine Diagonalmatrix D und eine strikte obere Dreiecksmatrix N gilt. Benutze anschliessend ein Theorem aus der linearen Algebra (Jordan Normalform) welches besagt, dass für jede Matrix A ein Basiswechsel Q existiert, sodass $QAQ^{-1} = D + N$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix und N eine strikte obere Dreiecksmatrix N ist und zusätzlich $DN = ND$ gilt.*

Lösung:

(a) Mittels Induktion lässt sich zeigen, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Identität $T^{-1} \cdot A^k \cdot T = (T^{-1} \cdot A \cdot T)^k$ gilt. Somit haben wir:

$$T^{-1} \cdot e^A \cdot T = T^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \cdot T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} T^{-1} \cdot A^k \cdot T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (T^{-1} \cdot A \cdot T)^k = e^{T^{-1} \cdot A \cdot T}.$$

(b) Für eine Diagonalmatrix gilt

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_n} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt
$$\det(e^D) = e^{d_1}e^{d_2}\cdots e^{d_n} = e^{d_1+d_2+\cdots+d_n} = e^{\mathrm{tr}(D)}.$$
Sei nun N eine strikte obere Dreiecksmatrix
$$N = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
Mit vollständiger Induktion sieht man leicht, dass für $k \geq 1$ alle Potenzen N^k strikte obere Dreiecksmatrizen sind. Mit der Definition des Matrixexponentials folgt
$$e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = \mathbb{1} + N + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N^3 + \cdots = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
und e^N ist eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Hieraus folgt
$$\det(e^N) = 1 = e^0 = e^{\mathrm{tr}(N)}.$$
Für eine beliebige Matrix A, wähle einen Basiswechsel Q, sodass $QAQ^{-1} = D + N$ die Jordan Normalform ist. Wegen $DN = ND$ gilt $e^{N+D} = e^N e^D$ und wir berechnen:
$$\begin{aligned}\det(e^A) &= \det(Q^{-1}e^{D+N}Q) = \det(e^De^N) = \det(e^D)\det(e^N) = e^{\mathrm{tr}(D)}e^{\mathrm{tr}(N)} \\ &= e^{\mathrm{tr}(D)+\mathrm{tr}(N)} = e^{\mathrm{tr}(D+N)} = e^{\mathrm{tr}(Q^{-1}(D+N)Q)} = e^{\mathrm{tr}(A)}\end{aligned}$$

4. Sei A eine $n \times n$ Matrix. Dann hat das homogene Anfangswertproblem (für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$)
$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$
die Lösung
$$y(t) = e^{At}y_0.$$
   (a) Löse das AWP
   $$\ddot{f} + \omega^2 f = 0, \quad f(0) = 0, \quad \dot{f}(0) = 1$$
   indem Du es in die obige Form überführst.
   Tip: *Setze z. B.* $y_1 = f, y_2 = \dot{f}/\omega$.
   (b) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Verifiziere, dass das inhomogene AWP
   $$\frac{dy}{dt} = Ay + h(t), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$
   die Lösung
   $$y(t) = e^{At}\left(y_0 + \int_0^t e^{-As}h(s)ds\right)$$
   besitzt.
   (c) Benutze dies wiederum, um die allgemeine Lösung von
   $$\ddot{f} + f = \frac{1}{cos(t)}, \quad f(0) = 0, \quad \dot{f}(0) = 1$$
   zu finden.

Lösung:

(a) Wir erhalten $\dot{y}_1 = \dot{f} = \omega \cdot y_2$ sowie $\dot{y}_2 = \ddot{f}/\omega = -\omega \cdot f = -\omega \cdot y_1$ und somit:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\omega \end{pmatrix}$$

Wenn wir die geraden und ungeraden Potenzen von $At = \begin{pmatrix} 0 & \omega \cdot t \\ -\omega \cdot t & 0 \end{pmatrix}$ gruppieren, sehen wir, dass gilt $e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t) & \sin(\omega \cdot t) \\ -\sin(\omega \cdot t) & \cos(\omega \cdot t) \end{pmatrix}$.
(Dies ist übrigens analog zu $e^{i \cdot \omega \cdot t} = \cos(\omega \cdot t) + i \sin(\omega \cdot t)$.) Also lautet die Lösung:

$$y(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t) & \sin(\omega \cdot t) \\ -\sin(\omega \cdot t) & \cos(\omega \cdot t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\omega \cdot t)/\omega \\ \cos(\omega \cdot t)/\omega \end{pmatrix},$$

also

$$f = \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\omega}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{At}\left(y_0 + \int_0^t e^{-As} h(s) ds\right)\right) &= A \overbrace{e^{At}\left(y_0 + \int_0^t e^{-As} h(s) ds\right)}^{y(t)} + e^{At}(0 + e^{-At} h(t)) \\ &= A\, y(t) + h(t). \end{aligned}$$

(c) Setze $y_1 = f, y_2 = \dot{f}$. Dann haben wir $\dot{y}_1 = \dot{f} = y_2$ und $\dot{y}_2 = \ddot{f} = 1/cos(t) - f = 1/cos(t) - y_1$, also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/cos(t) \end{pmatrix}.$$

Analog zu oben (für $\omega = -1$) erhalten wir $e^{-As} = \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}$ und entsprechend

$$e^{-As} h(s) = \begin{pmatrix} -\tan(s) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\int_0^t \begin{pmatrix} -\tan(s) \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \ln(\cos(t)) \\ t \end{pmatrix}$$

und schliesslich

$$f(t) = \sin(t) + \cos(t) \ln(\cos(t)) + t \sin(t) = \cos(t) \ln(\cos(t)) + (t+1) \sin(t).$$

5. Berechne alle partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x, y) = x$

(b) $f(x, y) = e^{xy}$

(c) $f(x, y) = x^y$

(d) $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

(e) $f(x, y) = x^2 y \sin(xy)$

(f) $f(x, y, z) = xy^2 z^3$

Lösung:

Es folgt direkt

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 1,$

$\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0$

(b) $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) = ye^{xy},$

$\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = xe^{xy}$

(c) $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) = yx^{y-1},$

$\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y} e^{y \ln x} = \ln x e^{y \ln x} = x^y \ln x$

(d) $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)-(x-y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2},$

$\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \dfrac{-(x^2+y^2)-(x-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

(e) $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2xy \sin(xy) + x^2y^2 \cos(xy),$

$\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2 \sin(xy) + x^3 y \cos(xy)$

(f) $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = y^2z^3,$

$\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = 2xyz^3,$

$\dfrac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = 3xy^2z^2$

6. Betrachte eine Abbildung

$$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad (m,n \geq 1)$$

gegeben durch eine Matrix $A = (a_{ij})$.

Sei $||A||_{a,b}$ die **Operatornorm** von A, wobei $a.b \in \{1,2,\infty\}$ und wir $\mathbb{R}^m$ mit der Norm $||\cdot||_a$ und $\mathbb{R}^n$ mit der Norm $||\cdot||_b$ ausstatten. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $||A||_{2,2}$ der grösste Singulärwert von A ist (die Spektralnorm) und $||A||_{\infty,\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ die Zeilensummennorm. Zeige analog:

(a) $||A||_{1,1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ ist die Spaltensummennorm.

(b) $||A||_{1,\infty} = \max_{ij} |a_{ij}|$ ist der grösste Eintrag.

(c) $||A||_{2,\infty} = \max_i ||(a_{ij})_j||_2$ ist die grösste Zeilenvektorlänge.

(d) $||A||_{1,2} = \max_j ||(a_{ij})_i||_2$ ist die grösste Spaltenvektorlänge.

Lösung:

(a) Bezeichne mit e_j den j-ten Einheitsvektor. Dann gilt

$$||A||_{1,1} = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_1}{||x||_1} \geq \frac{||Ae_j||_1}{||e_j||_1} = ||(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})||_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Da diese Abschätzung für jedes $j = 1, \dots, m$ gilt, erhalten wir

$$||A||_{1,1} \geq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Für die umgekehrte Abschätzung berechnen wir für $x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
||Ax||_1 &= \left|\left| \left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{m} a_{2j}x_j, \dots \sum_{j=1}^{m} a_{nj}x_j \right) \right|\right|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n,m} |a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^{m} |x_j| \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \leq \sum_{j=1}^{m} |x_j| \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \\
&= ||x||_1 \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right).
\end{aligned}$$

Für $x \neq 0$ folgt aus dieser Abschätzung

$$\frac{||Ax||_1}{||x||_1} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Die Behauptung folgt nun, wenn wir das Supremum über alle $x \neq 0$ betrachten.

(b) Für jedes i gilt: $\left| \sum_j a_{ij}x_j \right| \leq \max_j (|a_{ij}| \cdot ||x||_1)$ und Gleichheit gilt für $x = e_{j_0}$, mit j_0 der j-Index des maximalen $|a_{ij}|$. Es folgt, dass

$$\sup_{||x|| \leq 1} \max_i \left| \sum_j a_{ij}x_j \right| = \max_{ij} |a_{ij}|.$$

(c) Für jedes i gilt wegen Cauchy-Schwarz: $\left| \sum_j a_{ij}x_j \right| = |\langle a_i, x \rangle| \leq ||a_i||_2 ||x||_2$ und Gleichheit gilt, falls a_i und x linear abhängig sind. Also folgt wieder

$$\sup_{||x|| \leq 1} \max_i \left| \sum_j a_{ij}x_j \right| = \max_i ||a_i||_2.$$

(d) Wir berechnen, mit $W = A^T A = (w_{ij})$ (diese Matrix ist pos. semidefinit):

$$\begin{aligned}
||Ax||_2^2 = x^T A^T Ax = |x^T W x| = \left| \sum_{ij} w_{ij}x_i x_j \right| &\leq (\max_{ij} |w_{ij}|) \sum_{ij} |x_i x_j| \qquad (1) \\
&= (\max_{ij} |w_{ij}|) ||x||_1^2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Wegen Cauchy-Schwarz gilt $|w_{ij}| \leq \sqrt{(w_{ii}w_{jj})} \leq \max(w_{ii}, w_{jj})$ (denn nach Definition von W sind alle w_{ij} Skalarprodukte von Zeilen- mit Spaltenvektoren von A) und deswegen wird $\max_{ij} |w_{ij}|$ angenommen auf der Diagonalen, o. B. d. A. $\max_{ij} |w_{ij}| = w_{11}$. Dann wird in (1) Gleichheit erfüllt für $x = e_1$.
Somit gilt

$$\sup_{||x|| \leq 1} ||Ax||_2^2 = w_{11}, \quad \text{also} \quad \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax||_2 = \sqrt{w_{11}}$$

und $\sqrt{w_{11}}$ ist die maximale Spaltennorm.