

## Musterlösung Serie 4

1. Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Zeige:

- (a)  $f$  ist stetig differenzierbar.
- (b)  $\partial_x \partial_y f$  und  $\partial_y \partial_x f$  existieren und sind stetig auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- (c)  $\partial_x \partial_y f(0, 0) = 1$  und  $\partial_y \partial_x f(0, 0) = -1$ .

**Lösung:**

- (a) Die Funktion  $f(x, y)$  ist als Verkettung von differenzierbaren Funktionen an jeder Stelle  $(x, y) \neq (0, 0)$  differenzierbar. Die partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_y f(x, y) &= \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-xy^4 - 4x^3y^2 + x^5}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Beide partiellen Ableitungen sind offenbar stetig für  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Wir behaupten, dass die partiellen Ableitungen für  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  gegen 0 streben. Es gilt

$$|\partial_x f(x, y)| \leq \frac{|x|^4|y| + 4|x|^2|y|^3 + 5|y|^5}{\|(x, y)\|_\infty^4} \leq \frac{10\|(x, y)\|_\infty^5}{\|(x, y)\|_\infty^4} = 10\|(x, y)\|_\infty$$

wobei  $\|(x, y)\|_\infty := \max(|x|, |y|)$ . Eine analoge Rechnung zeigt  $|\partial_y f(x, y)| \leq 10\|(x, y)\|_\infty$ . Hieraus folgt sofort die Behauptung.

Folglich ist  $f$  genau dann stetig differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen in  $(0, 0)$  existieren und jeweils Null sind. Das ist leicht zu verifizieren, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \partial_x f(0, 0) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0 \\ \partial_y f(0, 0) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0. \end{aligned}$$

- (b) Als Verkettung von differenzierbaren Funktionen sind die partiellen Ableitungen  $\partial_x f(x, y)$  und  $\partial_y f(x, y)$  an jeder Stelle  $(x, y) \neq (0, 0)$  differenzierbar. Die gemischten zweiten partielle Ableitungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \partial_y \partial_x f(x, y) &= \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2 + y^2)^2 - (x^4y + 4x^2y^3 - y^5)(4y^3 + 4x^2y)}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_y f(x, y) &= \frac{(-y^4 - 12x^2y^2 + 5x^4)(x^2 + y^2)^2 - (-xy^4 - 4x^3y^2 + x^5)(4x^3 + 4xy^2)}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}\end{aligned}$$

Die gemischten partiellen Ableitungen sind an jeder Stelle  $(x, y) \neq (0, 0)$  stetig. In Übereinstimmung mit dem Satz von Schwarz beobachten wir ausserdem, dass beide gemischten partiellen Ableitungen gleich sind.

- (c) Wir berechnen die gemischten partiellen Ableitungen an der Stelle  $(0, 0)$  mit der Definition und erhalten:

$$\begin{aligned}\partial_y \partial_x f(0, 0) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_x f(0, t) - \partial_x f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t - 0}{t} = -1 \\ \partial_x \partial_y f(0, 0) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_y f(t, 0) - \partial_y f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 0}{t} = 1.\end{aligned}$$

Die gemischten Ableitungen  $\partial_x \partial_y f(x, y)$  und  $\partial_y \partial_x f(x, y)$  existieren somit für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Allerdings sind diese in  $(0, 0)$  jeweils unstetig und die Rechnung zeigt, dass der Satz von Schwarz in diesem Fall nicht mehr gültig ist.

2. Sei  $k \geq 1$  eine natürliche Zahl und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit der Eigenschaft

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (a) Zeige, dass im Ursprung die Richtungsableitung

$$\partial_v f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t}$$

für jede Richtung  $v \in \mathbb{R}^n$  existiert.

- (b) Zeige, dass  $f$  im Ursprung nicht notwendigerweise differenzierbar ist.

**Hinweis:** Betrachte zum Beispiel  $f$  definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

### Lösung:

- (a) Aus der Gleichung  $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$  folgt mit  $\lambda = 0$  zunächst  $f(0) = 0$ . Für die Richtungsableitungen erhalten wir also:

$$\partial_v f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^k f(v) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{k-1} f(v).$$

Für  $k > 1$  ist der Grenzwert offensichtlich 0. Für  $k = 1$  ist  $t^{k-1} = t^0 = 1$  und der Grenzwert ist  $f(v)$ .

- (b) Zunächst gilt  $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^3}{\lambda^2} f(x, y) = \lambda f(x, y)$ . Auf den Achsen  $x = 0$  und  $y = 0$  ist  $f$  konstant 0, also sind auch die entsprechenden Richtungsableitungen konstant 0, insbesondere sind sie gleich 0 im Ursprung. Wäre  $f$  differenzierbar, wären demzufolge alle Richtungsableitungen im Ursprung gleich 0. Die Ableitung entlang der Diagonalen  $x = y$  besitzt jedoch Betrag  $\frac{1}{2}$ .

3. Bestimme die Taylorpolynome vom Grad 2 an der Stelle  $a$  für die folgenden Funktionen.

- (a)  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$  an der Stelle  $a = (1, 2)$ .  
 (b)  $f(x, y, z) = ze^{\frac{x}{y}}$  an der Stelle  $a = (1, 1, 1)$ .  
 (c)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$  an der Stelle  $a = (0, 0, 0)$ .

**Lösung:**

Wir bezeichnen mit  $T_{f,a}^2(x, y)$  das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion  $f$  an der Stelle  $a$ . Dabei verwenden wir die Konvention, dass  $(x, y)$  die relative Abweichung von der Entwicklungsstelle  $a$  beschreibt und die Taylorreihe somit eine Näherung der Form

$$f(a_1 + x, a_2 + y) \approx T_{f,a}(x, y)$$

liefert.

- (a) Die partiellen Ableitungen von  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$  sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_x f &= \frac{-1}{x^2 y}, & \partial_y f &= \frac{-1}{x y^2} \\ \partial_x^2 f &= \frac{2}{x^3 y}, & \partial_x \partial_y f &= \frac{1}{x^2 y^2} = \partial_y \partial_x f, & \partial_y^2 f &= \frac{2}{x y^3}. \end{aligned}$$

Damit folgt für das Taylorpolynom an der Stelle  $a = (1, 2)$

$$\begin{aligned} T_{f,(1,2)}^2(x, y) &= f(a) + df(a) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y) d^2 f(a) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{8}y^2. \end{aligned}$$

- (b) Die partiellen Ableitungen von  $f(x, y, z) = ze^{\frac{x}{y}}$  sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_x f &= \frac{z}{y} e^{\frac{x}{y}}, & \partial_y f &= \frac{-xz}{y^2} e^{\frac{x}{y}}, & \partial_z f &= e^{\frac{x}{y}} \\ \partial_x \partial_y f &= \partial_y \partial_x f = \left(\frac{-z}{y^2} - \frac{xz}{y^3}\right) e^{\frac{x}{y}}, & \partial_x \partial_z f &= \partial_z \partial_x f = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}, & \partial_y \partial_z f &= \partial_z \partial_y f = \frac{-x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} \\ \partial_x^2 f &= \frac{z}{y^2} e^{\frac{x}{y}}, & \partial_y^2 f &= \left(\frac{2zx}{y^3} + \frac{zx^2}{y^4}\right) e^{\frac{x}{y}}, & \partial_z^2 f &= 0 \end{aligned}$$

Damit folgt für das Taylorpolynom an der Stelle  $a = (1, 1, 1)$ :

$$\begin{aligned} T_{f,(1,1,1)}^2(x, y, z) &= f(a) + df(a) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y, z) d^2 f(a) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= e + (e, -e, e) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y, z) \begin{pmatrix} e & -2e & e \\ -2e & 3e & -e \\ e & -e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= e \left(1 + x - y + z + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - 2xy - yz + xz\right) \end{aligned}$$

- (c) Die partiellen Ableitungen von  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$  sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_x f &= 2x - 2yz, & \partial_y f &= 2y - 2xz, & \partial_z f &= 2z - 2xy \\ \partial_x \partial_y f &= \partial_y \partial_x f = -2z, & \partial_y \partial_z f &= \partial_z \partial_y f = -2x, & \partial_x \partial_z f &= \partial_z \partial_x f = -2y \end{aligned}$$

$$\partial_x^2 f = 2, \quad \partial_y^2 f = 2, \quad \partial_z^2 f = 2$$

Damit folgt für das Taylorpolynom an der Stelle  $a = (0, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned} T_{f,(0,0,0)}^2(x, y, z) &= f(a) + df(a) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y, z) d^2 f(a) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= 0 + (0, 0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y, z) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

4. Bestimme die Taylorreihen an der Stelle  $a$  für die folgenden Funktionen.

(a)  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$  an der Stelle  $a = (1, 2)$ .

(b)  $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$  an der Stelle  $a = (0, 0)$ .

**Hinweis:** Für  $z \in (-1, 1)$  gilt die folgende Darstellung:

$$\sqrt{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} z^n, \quad \text{wobei} \quad \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdots (1 - 2(n-1))}{2^n n!}$$

**Lösung:**

(a) Berechne zuerst die allgemeinen partiellen Ableitungen der Funktion  $f$ :

$$\begin{aligned} \partial_x^k \partial_y^l f &= (-1)(-2) \cdots (-k)x^{-(k+1)}(-1)(-2) \cdots (-l)y^{-(l+1)} \\ &= (-1)^{k+l} k! l! x^{-(k+1)} y^{-(l+1)}. \end{aligned}$$

Ausgewertet am Punkt  $a = (1, 2)$  ergibt dies

$$\partial_x^k \partial_y^l f(1, 2) = (-1)^{k+l} k! l! 2^{-(l+1)}.$$

Einsetzen in die Formel für die Taylorreihe liefert:

$$\begin{aligned} Tf((x, y), a) &= \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k! l!} (x-1)^k (y-2)^l \partial_x^k \partial_y^l f(1, 2) \\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty} (x-1)^k (y-2)^l (-1)^{k+l} 2^{-(l+1)}. \end{aligned}$$

(b) Es lässt sich zeigen, dass die Taylorreihe der Funktion  $g(z) = \sqrt{1+z}$  im Ursprung durch die Binomialreihe

$$Tg(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} z^n$$

gegeben ist. Man sieht leicht, dass der Konvergenzradius dieser Reihe 1 beträgt. Wir verifizieren zunächst, dass  $Tg(z) = g(z)$  für alle  $z \in (-1, 1)$  gilt, und somit  $g$  tatsächlich durch seine Taylorreihe dargestellt wird. Wir benutzen dafür das Additionstheorem der Binomialkoeffizienten

$$\sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}$$

welches für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  gültig ist (siehe Königsberger I, 4.2 (6)). Mit  $s = t = \frac{1}{2}$  erhalten wir dann

$$(Tg(z))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{\frac{1}{2}}{k} \binom{\frac{1}{2}}{n-k} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1}{n} z^n = 1 + z.$$

Da zusätzlich  $Tg(0) = 1 > 0$  gilt, folgt  $Tg(z) = \sqrt{1+z} = g(z)$ .

Wir setzen nun  $z = x^2 + y^2$  in die obere Darstellung ein und erhalten

$$f(x, y) = \sqrt{1+x^2+y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (x^2+y^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{\frac{1}{2}}{n} \binom{n}{k} x^{2k} y^{2n-2k}$$

Die rechte Seite konvergiert absolut für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Wir haben somit eine absolut konvergente Potenzreihendarstellung für  $f$  gefunden und diese stimmt automatisch mit der Taylorreihe von  $f$  überein. (Es ist ein allgemeines Resultat, dass die Taylorreihe einer Potenzreihe durch die Potenzreihe selber gegeben ist. Um dies einzusehen muss man lediglich die Ableitungen der Potenzreihe betrachten.)

5. Zeige, dass die folgenden Funktionen glatt, also unendlich oft differenzierbar sind, und berechne jeweils die partielle Ableitung und die zweite partielle Ableitung (Hesse-Matrix).

- (a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = (x^3 - y^2)(6xy)$ .
- (b)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = \sin(x^2y)z$
- (c)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$
- (d)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = (x^5 + y^5)(y - 3\cos(x))$

**Lösung:**

Alle Funktionen sind als Summe, Produkt oder Verkettung von differenzierbaren Funktionen wieder differenzierbar.

(a)  $\partial_x f(x, y) = 24x^3y - 6y^3$ ,  $\partial_y f(x, y) = 6(x^4 - 3xy^2)$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x, y) & \partial_{xy} f(x, y) \\ \partial_{yx} f(x, y) & \partial_{yy} f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72x^2y & 6(x^3 - y^2) + 18x^3 - 12y^2 \\ 6(x^3 - y^2) + 18x^3 - 12y^2 & -36xy \end{pmatrix}$$

(b)  $\partial_x f(x, y, z) = 2xyz \cos(x^2y)$ ,  $\partial_y f(x, y, z) = x^2z \cos(x^2y)$ ,  $\partial_z f(x, y, z) = \sin(x^2y)$

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x, y, z) & \partial_{xy} f(x, y, z) & \partial_{xz} f(x, y, z) \\ \partial_{yx} f(x, y, z) & \partial_{yy} f(x, y, z) & \partial_{yz} f(x, y, z) \\ \partial_{zx} f(x, y, z) & \partial_{zy} f(x, y, z) & \partial_{zz} f(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2yz \cos(x^2y) - 4x^2y^2z \sin(x^2y) & 2xz \cos(x^2y) - 2x^3yz \sin(x^2y) & 2xy \cos(x^2y) \\ 2xz \cos(x^2y) - 2x^3yz \sin(x^2y) & -x^4z \sin(x^2y) & x^2 \cos(x^2y) \\ 2xy \cos(x^2y) & x^2 \cos(x^2y) & 0 \end{pmatrix}$$

(c)  $df(x, y, z) = (\partial_x f(x, y, z) \quad \partial_y f(x, y, z) \quad \partial_z f(x, y, z)) = (2x \quad -2y + 2z \quad -2z + 2y)$

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(d) Wir berechnen zunächst die partiellen Ableitungen mit der Produktregel zu

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= 5x^4(y - 3 \cos(x)) + 3(x^5 + y^5) \sin(x) \\ &= 5x^4 y - 15x^4 \cos(x) + 3x^5 \sin(x) + 3y^5 \sin(x)\end{aligned}$$

und

$$\partial_y f(x, y) = 5y^4(y - 3 \cos(x)) + (x^5 + y^5) = 6y^5 - 15y^4 \cos(x) + x^5$$

Damit folgt

$$df(x, y) = (5x^4 y - 15x^4 \cos(x) + 3x^5 \sin(x) + 3y^5 \sin(x), 6y^5 - 15y^4 \cos(x) + x^5).$$

$H_f(x, y) =$

$$\begin{pmatrix} (3(x^5 + y^5) \cos(x) + 30x^4 \sin(x) + 20x^3(y - 3 \cos(x))) & 5x^4 + 15y^4 \sin(x) \\ 5x^4 + 15y^4 \sin(x) & 20y^3(y - 3 \cos(x)) + 10y^4 \end{pmatrix}$$