Musterlösung Serie 5

1. Die Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$ sind durch die Abbildung

$$P : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad P(r,\phi) := \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

definiert.

(a) Zeige, dass P stetig differenzierbar ist und berechne die Ableitung dP.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und definiere $g(r,\phi) := f(P(r,\phi))$. Zeige, dass

$$\partial_x f(P(r,\phi)) = \partial_r g(r,\phi)\cos(\phi) - \frac{1}{r}\sin(\phi)\partial_\phi g(r,\phi)$$
$$\partial_y f(P(r,\phi)) = \partial_r g(r,\phi)\sin(\phi) + \frac{1}{r}\cos(\phi)\partial_\phi g(r,\phi).$$

gilt und schliesse hieraus

$$\nabla f(P(r,\phi)) = \partial_r g(r,\phi)\begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} + \frac{1}{r}\partial_\phi g(r,\phi)\begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: *Benutze die Kettenregel.*

(c) Berechne den Gradienten der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \log(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Hinweis: *In Polarkoordinaten ist f durch die Funktion $g(r,\phi) = \log(r)$ gegeben.*

Lösung:

(a) Die Ableitung von P ist gegeben durch die Jacobi Matrix

$$dP(r,\phi) = \begin{pmatrix} \partial_r P_1 & \partial_\phi P_1 \\ \partial_r P_2 & \partial_\phi P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Da alle partiellen Ableitungen offenbar stetig sind, ist P stetig differenzierbar.

(b) Die Kettenregel liefert $df \circ dP = dg$, d.h.

$$(\partial_x f(P(r,\phi)), \partial_y f(P(r,\phi)))\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{pmatrix} = (\partial_r g(r,\phi), \partial_\phi g(r,\phi)).$$

Wir benutzen die Rechenregel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

um $dP(r,\phi)$ zu invertieren und erhalten:

$$(\partial_x f(P(r,\phi)), \partial_y f(P(r,\phi))) = (\partial_r g(r,\phi), \partial_\phi g(r,\phi))\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \frac{-1}{r}\sin(\phi) & \frac{1}{r}\cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Ausführen der Matrixmultiplikation liefert nun die gewünschten Formeln

$$\partial_x f(P(r,\phi)) = \partial_r g(r,\phi)\cos(\phi) - \frac{1}{r}\sin(\phi)\partial_\phi g(r,\phi)$$
$$\partial_y f(P(r,\phi)) = \partial_r g(r,\phi)\sin(\phi) + \frac{1}{r}\cos(\phi)\partial_\phi g(r,\phi).$$

(c) Sei $f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2})$ und $g(r,\phi) := f(P(r,\phi)) = \log(r)$. (Hier benutzen wir $(r\cos(\phi))^2 + (r\sin(\phi))^2 = r^2(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi)) = r^2$). Da $\partial_\phi g = 0$ gilt, folgt mit der Formel aus Teil (b):

$$\nabla f(x,y) = \partial_r g(r,\phi)\begin{pmatrix}\cos(\phi)\\ \sin(\phi)\end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix}\cos(\phi)\\ \sin(\phi)\end{pmatrix} = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix}r\cos(\phi)\\ r\sin(\phi)\end{pmatrix}$$

wobei $(x,y) = P(r,\phi)$ gilt. Den letzten Ausdruck können wir wieder in kartesischen Koordinaten ausdrücken und erhalten:

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

2. Wir betrachten die Abbildungen

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,,\quad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix}x^2+e^y\\ x+y\\ y\end{pmatrix}$$

und

$$\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,,\quad (u,v,w) \mapsto \begin{pmatrix}uv\\ w\end{pmatrix}.$$

Sei $\gamma = \beta \circ \alpha$. Berechne die Jacobi-Matrizen von α, β und γ.

Lösung:

Die Jacobi-Matrix von α ist

$$\begin{pmatrix}2x & e^y\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

und die Jacobi-Matrix von β ist

$$\begin{pmatrix}v & u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel bekommen wir daher

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial(\gamma_1,\gamma_2)}{\partial(x,y)}\right] &= \begin{pmatrix}v & u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{u=x^2+e^y, v=x+y, w=y} \cdot \begin{pmatrix}2x & e^y\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x+y & x^2+e^y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2x & e^y\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3x^2+2xy+e^y & e^y(x+y+1)+x^2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. Untersuche die folgenden Funktionen auf kritische Punkte und Extrema.

(a) $f(x,y) = x^3+y^3+3xy$.

(b) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xyz$.

(c) $f(x,y) = (x-1)e^{-(x^2+y^2)}$

(d) $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$

Lösung:

(a) Die Ableitung ist gegeben durch

$$df(x,y) = \big(3x^2 + 3y,\, 3y^2 + 3x\big)$$

und $df(x,y) = 0$ liefert

$$3x^2 + 3y = 0, \qquad 3y^2 + 3x = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt $y = -x^2$ und einsetzen in die zweite Gleichung liefert $3x^4 = -3x$. Also gilt $x = 0$ oder $x = -1$ und wir erhalten die folgenden kritischen Punkte

$$\mathrm{Krit}(f) = \{(0,0),\, (-1,-1)\}$$

Die Hessematrix von f ist gegeben durch

$$d^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$$

und wir erhalten in den kritischen Punkten

$$d^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad d^2 f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(d^2 f(0,0)) = -9 < 0$, ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt von f. Da $\det(d^2 f(-1,-1)) = 27 > 0$ und $\mathrm{tr}(d^2 f(-1,-1)) = -12 < 0$ gilt, ist $(-1,-1)$ ein lokales Maximum von f.

(b) Es gilt

$$df(x,y,z) = (2x + 2yz, 2y + 2xz, 2z + 2xy).$$

und $df(x,y,z) = 0$ liefert die drei Gleichungen

$$2x + 2yz = 0, \qquad 2y + 2xz = 0, \qquad 2z + 2xy = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = -yz$. Einsetzen in die zweite und dritte Gleichung liefert dann

$$2y = 2yz^2, \qquad 2z = 2y^2 z$$

Falls $y = 0$ gilt, so folgt $z = x = 0$ und wir erhalten den kritischen Punkte $(0,0,0)$. Analog folgt aus $z = 0$ ebenfalls $x = y = 0$. Falls $y, z \neq 0$ gilt, so erhalten wir $z^2 = 1 = y^2$ und aus $x = -yz$ folgt auch $x^2 = 1$. Also gilt $x, y, z = \pm 1$ und durch ausprobieren erhalten wir die kritischen Punkte $(-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1), (-1,-1,-1)$. Zusammengefasst erhalten wir

$$\mathrm{Krit}(f) = \{(0,0,0), (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1), (-1,-1,-1)\}.$$

Die Hessemarix von f ist gegeben durch

$$d^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 2z & 2y \\ 2z & 2 & 2x \\ 2y & 2x & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir diskutieren die Hessematrix in den kritischen Punkten:

$$d^2 f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist eine postive Diagonalmatrix und folglich positiv definit. Somit ist $(0,0,0)$ ein lokales Minimum.

Die Matrizen

$$d^2 f(-1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad d^2 f(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d^2f(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad d^2f(-1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

haben alle Determinante -36. Wir argumentieren, dass diese Matrizen alle indefinit sind: Als symmetrische Matrizen, sind diese Matrizen alle diagonalisierbar und die Determinante ist das Produkt der drei Eigenwerte. Da die Determinante negativ ist, sind also entweder alle drei Eigenwerte negativ oder es gibt genau einen negativen Eigenwert und zwei positive Eigenwerte. Im ersten Fall wäre die Matrix negativ definit und im zweiten Fall wäre die Matrix indefinit. Da bei allen vier Matrizen der Eintrag oben links positiv ist, gilt insbesondere $e_1^t(d^2f)e_1 > 0$ und keine dieser Matrizen ist negativ definit. Damit haben wir schliesslich geklärt, dass die kritischen Punkte $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(-1,-1,-1)$ Sattelpunkte sind.

(c) Es gilt

$$df(x,y) = (e^{-(x^2+y^2)} - 2x(x-1)e^{-(x^2+y^2)}, \, -2y(x-1)e^{-(x^2+y^2)})$$

und $df(x,y) = 0$ liefert die zwei Gleichungen

$$(1 - 2x^2 + 2x)e^{-(x^2+y^2)} = 0, \qquad -2y(x-1)e^{-(x^2+y^2)} = 0.$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu $1 - 2x^2 + 2x = 0$ und folglich $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$. Da $x \neq 1$ gilt, ist die zweite Gleichung äquivalent zu $y = 0$. Somit gilt:

$$\operatorname{Krit}(f) = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \right\}.$$

Die Hessematrix von f ist gegeben durch

$$d^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x + 2 - 2x(1 - 2x^2 + 2x) & -2y(1 - 2x^2 + 2x) \\ -2y(1 - 2x^2 + 2) & (x-1)(4y^2 - 2) \end{pmatrix} e^{-(x^2+y^2)}$$

In den kritischen Punkten vereifacht sich dieser Ausdruck erheblich, da $1-2x^2+2x = 0$ gilt, und wir erhalten

$$d^2f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0 \right) = \begin{pmatrix} 4 - 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$d^2f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0 \right) = \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}.$$

Da $4 - 2\sqrt{3} < 0 < 1 - \sqrt{3}$ gilt, ist $d^2f(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0)$ indefinit und $(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0)$ ist Sattelpunkt. Die Diagonaleintraäge von $d^2f(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0)$ sind beide positiv und folglich ist $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0)$ ein lokales Minimum.

(d) Ausmultiplizieren liefert $f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$ und wir erhalten

$$df(x,y) = (8x^3 - 6xy, \, -3x^2 + 2y)$$

und $df(x,y) = 0$ ist äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$8x^3 - 6xy = 0, \qquad -3x^2 + 2y = 0.$$

Die zweite Gleichung liefert $y = \frac{3}{2}x^2$ und einsetzen in die erste Gleichung ergibt $8x^3 - 9x^3 = 0$ und folglich $x = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt dann $y = 0$ und somit

$$\operatorname{Krit}(f) = \{(0,0)\}.$$

Die Hessematrix von f ist gegeben durch

$$d^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 6y & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix}.$$

Im kritischen Punkt erhalten wir

$$d^2f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(d^2f(0,0)) = 0$ gilt, ist $(0,0)$ ein degenerierter kritischer Punkt und wir können keine Aussage darüber treffen ob es sich um ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt handelt. Um ein lokales Maximum kann es sich nicht handeln, da die Hessematrix in $(0,0)$ positiv semidefinit ist.
Wir können das Verhalten von f in $(0,0)$ durch sorgfältiges betrachten der Definition $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$ klären. Es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$f(x,\frac{3}{2}x) = -\frac{1}{4}x^4 < 0, \qquad f(x,0) = 2x^4 > 0$$

Insbesondere folgt für $x \to 0$, dass f in jeder Umgebung $B_\epsilon(0,0)$ des Ursprungs postive und negative Werte annimmt. Da $f(0,0) = 0$ gilt, kann also f kein lokales Minimum im Ursprung besitzen.

4. Sei $f\colon V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ multilinear. Dann ist f differenzierbar und

$$\begin{aligned} &df(a_1,\ldots,a_n)(h_1+\ldots+h_n) = \\ &f(h_1,a_2,\ldots,a_n) + f(a_1,h_2,a_3,\ldots,a_n) + \ldots + f(a_1,\ldots,a_{n-1},h_n) \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Berechne die Ableitung des Kreuzproduktes $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(b) Berechne die Ableitung des Matrizenproduktes $\mathbb{R}^{(p\times q)} \times \mathbb{R}^{(q\times r)} \to \mathbb{R}^{(p\times r)}$.

(c) Zeige, dass die Determinantenfunktion

$$f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad f(A) := \det(A)$$

stetig differenzierbar ist und

$$df(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad df(A)B = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(A)B), \tag{2}$$

wobei $\operatorname{adj}(A)$ die sogenannte Adjunkte zu A ist mit Einträgen

$$(\operatorname{adj}(A))_{ji} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

und A_{ij} aus A durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte gewonnen wird.
Sofern $\det(A) \neq 0$, so gilt nach der Cramerschen Regel

$$A^{-1} = \operatorname{adj}(A)/\det(A),$$

so, dass man (2) auch schreiben kann als

$$df(A)B = \operatorname{tr}(A^{-1}B)\det(A).$$

Hinweis: *Betrachte* $\det(A)$ *als multilineare Funktion in den Zeilen (oder Spalten) von* A.

Lösung:

(a) Sei f das Kreuzprodukt. Mit einer direkten Rechnung lässt sich überprüfen, dass f multilinear ist, wir können also obige Gleichung anwenden. Wir berechnen das Differential an der Stelle $(u,v) = ((u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3))$. Es gilt dann

$$df(u,v)(h_1+h_2) = h_1 \times v + u \times h_2.$$

Seien e_i, $i = 1,2,3$ die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^3$, dann berechnen wir zuerst:

$$\begin{aligned} e_1 \times v &= \begin{pmatrix} 0 \\ -v_3 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ e_2 \times v &= \begin{pmatrix} v_3 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix} \\ e_3 \times v &= \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Terme mit u verwenden wir die Identität $u \times e_i = -e_i \times u$, insgesamt erhalten wir dann als Ableitungsmatrix:

$$df(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_2 & 0 & -u_3 & u_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 & u_3 & 0 & -u_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei f das Matrixprodukt. Wiederum lässt sich direkt nachrechnen, dass dieses multilinear ist und wir wissen, dass wir das Differential an einem Punkt (A,B) darstellen können als

$$df(A,B)(h_1+h_2) = h_1 B + A h_2.$$

Beachte, dass h_1 eine $p \times q$- und h_2 eine $q \times r$-Matrix ist. Wir setzen nun die Elementarmatrizen e_{ij} ein, welche im (i,j)-ten Eintrag eine 1 haben und sonst 0. Zwecks Einfachheit der Notation bezeichnen wir alle Elementarmatrizen jedwelcher Dimension mit e_{ij}, es ist aber immer eine Matrix der geeigneten Dimension zu verstehen. Wenn wir schreiben

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{q1} & \dots & b_{qr} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so gilt

$$\begin{aligned} Be_{ij} &= \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{qj} & \end{pmatrix} \\ e_{ij}A &= \begin{pmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{iq} \\ \\ \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

jeweils 0 ausserhalb der angegebenen Zeile respektive Spalte, also gilt für ein Element $e_{ij} + e_{kl}$:

$$df(A,B)(e_{ij}+e_{kl}) = \begin{pmatrix} & & b_{1j} & & \\ & & \vdots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kj}+b_{kj} & \dots & a_{kq} \\ & & \vdots & & \\ & & b_{qj} & & \end{pmatrix}$$

(c) Schreibt man $A = (a_1 \ \dots \ a_n)$ (wobei a_j die j-te Spalte ist) und ebenso $H = (h_1 \ \dots \ h_n)$, so ist $\det(A)$ multilinear in $a_1, ..., a_n$. Also ist nach (1) die Funktion $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \cong (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$d\det(A)H = \det(h_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) + \det(a_1 \ h_2 \ a_3 \ \dots \ a_n) + \ldots + \det(a_1 \ \dots \ a_{n-1} \ h_n)$$

Wir berechnen den j-ten Term durch Laplace-Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$d\det(a_1 \ \dots \ h_j \ \dots \ a_n) = \sum_i (-1)^{(i+j)} h_{ij} \det(A_{ij})$$

Zusammengenommen ist dann

$$\sum_j \sum_i (-1)^{(i+j)} \det(A_{ij}) h_{ij} = \sum_j \sum_i \operatorname{adj}(A)_{ji} h_{ij} = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(A)H).$$

5. Es bezeichne $||\cdot||$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wie oft sind die folgenden Funktionen differenzierbar? (Welche der Funktionen in (a) - (c) sind konvex?)

(a) $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := ||x||$.

(b) $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := ||x||^2$.

(c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_3(x,y) := \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$.

(d) $f_4 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_4(x) := \begin{cases} x \log(||x||) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Lösung:

(a) $f_1(x) = ||x||$ ist konvex, da es sich um eine Normfunktion handelt. Denn für $t \in [0,1]$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt die Abschätzung

$$||tx + (1-t)y|| \leq ||tx|| + ||(1-t)y|| = t||x|| + (1-t)||y||.$$

Für $x \neq 0$ sind die partiellen Ableitungen gegeben durch

$$\partial_i f_1(x) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_i}{||x||}.$$

Diese lassen sich nicht stetig in den Ursprung fortsetzen und folglich ist f_1 nicht stetig differenzierbar.

(b) Die Funktion $f_2(x) = ||x||^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ ist ein Polynom vom Grad 2 und somit unendlich oft stetig differenzierbar. Es gilt

$$df_2(x) = (2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n)$$

$$d^2 f_2(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathbb{1}$$

und alle höheren partiellen Ableitungen verschwinden. Da die Hessematrix von f_2 in jedem Punkt positiv definit ist, ist f_2 konvex.

(c) Die Funktion oszilliert zum Beispiel entlang der Achse $x = y$ und ist somit nicht konvex. Die partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$\partial_x f_3(x) = y \sin\left(\frac{1}{xy}\right) + \frac{-1}{x} \cos\left(\frac{1}{xy}\right)$$

$$\partial_y f_3(x) = x \sin\left(\frac{1}{xy}\right) + \frac{-1}{y} \cos\left(\frac{1}{xy}\right).$$

Die Sinusterme bleiben um den Ursprung beschränkt, während die Cosinusterme unbeschränkt oszillieren. Folglich besitzen diese Funktionen keine stetige Fortsetzung in den Ursprung und f_3 ist nicht stetig differenzierbar.

(d) Die partiellen Ableitungen der Funktion sind gegeben durch

$$\partial_i f_4(x) = \log(||x||) e_i + \frac{x_i}{||x||^2} x.$$

Der zweite Term ist in einer Umgebung des Ursprungs beschränkt während $\log(||x||)$ gegen $-\infty$ divergiert für $x \to 0$. Folglich besitzen die partiellen Ableitungen keine stetigen Fortsetzungen und f_4 ist nicht stetig differenzierbar.