Serie 14 – Probeprüfung

Hinweis: *Diese Serie wird nicht nachbesprochen und ist nicht mehr relevant für den Bonus.*

Aufgabe 1.
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x+\pi) & x > 0 \\ x^2 + x - 1 & x \leq 0. \end{cases}$$

1. Wo ist f stetig?
2. Wo ist f differenzierbar?
3. Wo ist f stetig differenzierbar?

Aufgabe 2.
Berechne die folgenden Grenzwerte:

1. $$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right),$$
2. $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x \right),$$
3. $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+n^2}{n^3}$$

   Hinweis: *Interpretiere die Folgenglieder als Riemannsche Summen.*

Aufgabe 3.

1. Konvergiert die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n ?$$
2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)} ?$$

Aufgabe 4.
Berechne die folgenden Integrale:

1. $$\int xe^{-x^2}\,dx$$

2. $$\int (\log x)^2\,dx$$

3. $$\int \frac{9}{x^3-3x-2}\,dx$$

   Hinweis: -1 ist eine doppelte Nullstelle des Nenners.

Aufgabe 5.
Finde alle Lösungen der ODE

$$\begin{cases} y''(x)+y'(x)-6y(x)=50\cos(x) \\ y(0)=0, \end{cases}$$

welche für $x\to\infty$ beschränkt sind.

Aufgabe 6.
Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y)=xye^{-xy}$$

im Bereich $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, 1\leq y\leq 2, |xy|\leq 1\big\}$.

Aufgabe 7.
Berechne die Taylorreihen der folgenden Funktionen im Ursprung:

1. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^5}$.

   Hinweis: *Wenn Du keine explizite Formel für die Taylorreihe findest, gib das Taylorpolynom der Ordnung* 3 *an.*

2. Berechne den Wert der Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}$$

   Hinweis: *Verstehe die obige Reihe geeignet als Taylorreihe und benutze* $\tan(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Aufgabe 8.
Berechne das Volumen des Körpers

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+z^2\leq(\cos(y))^2, -\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}\}.$$

Aufgabe 9.

1. Berechne die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^{5\times 3}\to\mathbb{R},\quad f(X)=\det(X^TX)$$

2. Ist die Menge $\{X \in \mathbb{R}^{5\times 3} \mid f(X) = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit? (Begründung ist erforderlich.) Was ist ihre Dimension? Berechne ggf. den Tangentialraum an der Stelle
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.
Betrachte das (zeitunabhängige) Vektorfeld
$$v(x) = Ax,$$
mit $x \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine 2×2-Matrix.

Berechne für folgende A jeweils Eigenwerte und Eigenvektoren und zeichne darauf basierend das Phasenportrait.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 \\ -0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 11.
Sei $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0\}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld
$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_2 x_3^2 \end{pmatrix}$$
und $G := \{(x_1, x_2, x_3) \in M \mid x_3 \leq 2\} \subset M$.

Sei $\nu : G \to S^2$ das in x_3-Richtung zeigende Einheitsnormalenfeld. Berechne das Flussintegral
$$\int_G \langle \mathrm{rot}(f), \nu \rangle \, dS$$

Aufgabe 12.
Sei $v = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$ und $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \geq 0\}$. Berechne
$$\int_S v \cdot d\sigma.$$