Serie 1

1. Untersuche das Konvergenzverhalten und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$:

   (a) $a_n = \dfrac{n^2+5n}{3n^2-2}$

   (b) $a_n = n(-1)^n$

   (c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

   (d) $a_n = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$

   (e) $a_n = \left(\dfrac{3+4\mathbf{i}}{5}\right)^n$

   (f) $a_n = \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}$

   (g) $a_n = \sqrt[n]{7n^6+2n^2+1}$

   (h) $a_n = \dfrac{2^n - n^{10}}{2^n + n^{10}}$

2. Untersuche die folgenden Reihen auf ihre Konvergenz:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{(n+\sqrt{n})^2}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \mathbf{i}^n}{(3\mathbf{i})^n - 2^n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 3^{-n}$

3. Berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right).$$

   Tipp: Interpretiere den Grenzwert als Folge von Riemann-Summen die gegen ein Riemann-Integral konvergieren.

4. Bestimme die allgemeine reelle Lösung für die folgenden Differentialgleichungen

   (a) $y''(x) + 7y'(x) - 15y(x) = 0$.

   (b) $y^{(4)}(x) - y(x) = 0$.

   (c) $y^{(4)}(x) + 4y''(x) + 4y(x) = x^2$.

   (d) $y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + 5y''(x) = 0$.

   Tipp: Bestimme die Nullstellen der charakteristischen Polynome um ein komplexes Fundamentalsystem zu erhalten. In diesem sind alle reellen Lösungen enthalten (siehe Königsberger 10.2).

5. Bestimme die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differentialgleichungen für $x > 0$.

   (a) $x^2y''(x) - 3xy'(x) + 5y(x) = 0$.

   (b) $2xy'(x) - y(x) = \log(x)$.

   Tipp: Betrachte jeweils die Substitution $h(t) := y(e^t)$. Wenn y eine der oberen Gleichungen erfüllt, dann genügt h einer linearen Differentialgleichung.

6. Finde die allgemeine Lösung der zeitabhängigen affinen Gleichung

$$y'(t) = a(t)y(t) - b(t)$$

Tipp: Finde alle Lösungen der homogenen Gleichung $y'(t) = a(t)y(t)$ sowie mit Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

Abgabe: in der Woche vom 26. Februar 2018, in der Übungsstunde